Varianta 8

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.

a) Să se calculeze $f(-1)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X + 1$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$, $x > 0$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (6t^2 - 2t - 5)\, dt - 2 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 4)$, $B(5, -4)$ şi C mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Să se determine coordonatele punctului C şi lungimea segmentului $[AB]$.

b) Să se scrie ecuaţia cercului de diametru $[AB]$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la cercul de diametru $[AB]$ care trece prin punctul $D(6, \sqrt{7})$.

SUBIECTUL II

1. În $\mathbb{C}[X]$, mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi, se consideră polinomul $f = (X + i)^6 + (X - i)^6$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_6 \in \mathbb{C}$.

a) Să se calculeze $f(0)$.

b) Considerând forma algebrică a polinomului $f = a_6X^6 + a_5X^5 + \ldots + a_1X + a_0$, determinaţi coeficienţii a_6, a_5 şi a_4.

c) Să se calculeze suma $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Derivând cele două expresii ale lui f să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL III

1. Să se arate că $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$.

2. Se consideră a, b, c, d numere reale distincte două câte două. Se definesc funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ şi $g(x) = x^2 + x + 1$.

a) Să se arate că $f'(x) = (a - b)(a - c)(a - d)$.

b) Să se demonstreze că $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ g(a) & g(b) & g(c) & g(d) \end{vmatrix} = 0$.

c) Dezvoltând determinantul Δ după ultima linie, deduceţi identitatea

$$\frac{g(a)}{f'(a)} + \frac{g(b)}{f'(b)} + \frac{g(c)}{f'(c)} + \frac{g(d)}{f'(d)} = 0.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$ şi se defineşte şirul (I_n) astfel: $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ şi $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se calculeze I_0 şi I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + 4I_{n+1} + 5I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

c) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.

d) Utilizând punctele b) şi c) să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $10I_{n+2} \leq \dfrac{1}{n+1} \leq 10I_n$.

e) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\dfrac{1}{10(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{10(n-1)}$.

f) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = f(1)$.