Varianta 9

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

- **a)** Să se calculeze $f(1)$.
- **b)** Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X - 1$.
- **c)** Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$, $x > 0$.

3. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^x (3t^2 - 4t - 5)\, dt + 6 = 0$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuaţii: $d_1 : 3x - 2y = 0$, $d_2 : x + 3y - 11 = 0$ şi $d_3 : 2x - 3y + 5 = 0$.

- **a)** Să se determine punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2.
- **b)** Să se arate că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente.
- **c)** Să se scrie ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ care trece prin punctul de concurenţă al celor trei drepte.

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX - 1$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

- **a)** Să se arate că $S_3 - S_2 + aS_1 - 3 = 0$.
- **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_3 = 1$.

2. Pentru orice $x \in [0, 1)$ se defineşte suma

$$S_n(x) = \sqrt{1-x} + x\sqrt{1-x} + \cdots + x^{n-1}\sqrt{1-x},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- **a)** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sqrt{1-x} \cdot \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $x \in [0, 1)$.
- **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.
- **c)** Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordinul doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- **b)** Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
  Se consideră mulţimea $G = \{X(a) \mid a \in (-1, \infty)\}$.
- **c)** Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.
- **d)** Să se determine $(X(1))^2$.
- **e)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(X(1))^n = X(2^n - 1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se determine f' şi f''.

b) Să se arate că $f'(x) > 0, \forall\, x \in (0, \infty)$ şi $f'(x) < 0, \forall\, x \in (-\infty, 0)$.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

d) Pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, să se arate că aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, este mai mare decât $\frac{5}{6}\cdot$