

SESIUNEA IUNIE
Varianta 1

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se determine toate numerele scrise în baza 10 de forma \overline{abc} , divizibile cu 45, știind că a este cifră pară.
2. Un elev are o sumă de bani. După ce dublează această sumă, cheltuiește 150000 de lei. Apoi dublează suma rămasă și mai cheltuiește încă 200000 lei. După ce dublează noul rest și cheltuiește încă 250000 lei, constată că i-au rămas 100000 de lei.
 - a) Care este suma inițială pe care a avut-o elevul?
 - b) Care este suma pe care a avut-o elevul înainte de a cheltui 250000 de lei?

SUBIECTUL II

1. Se consideră binomul la putere $(x - 2y)^8$, $x, y \in \mathbb{R}$.
 - a) Să se calculeze suma coeficienților dezvoltării binomului.
 - b) Să se determine termenul din mijloc al dezvoltării.
2. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se calculeze A^2 .
 - b) Să se determine $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ astfel încât determinantul matricei $X + A$ să fie egal cu 2.
 - c) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.
 - d) Să se demonstreze că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A + 2A^2 + \dots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A.$$

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea numerelor reale \mathbb{R} pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că legea " \star " este asociativă și comutativă.
- b) Să se determine elementul neutru al legii " \star ".
- c) Să se demonstreze că mulțimea $G = (2, \infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea " \star ".
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$\underbrace{x \star x \star x \star \dots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 3^{n-1}(x - 2)^n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie $2\sqrt{3}$ cm.

- a) Să se calculeze volumul tetraedrului.
- b) Să se demonstreze că dreptele AB și CD sunt perpendiculare.