Varianta 9

Profil pedagogic

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, numărul $A = 5^{n-1} \cdot 2^n + 5^n \cdot 2^{n-1}$ este divizibil cu 70.

2. La prima ediție a unui cros au participat mai puțin de 1000 de sportivi, la a doua ediție au participat cu 15% mai mulți sportivi decât la prima ediție, iar la a treia ediție au participat cu 8% mai puțini decât la a doua ediție. Câți sportivi au participat la fiecare din cele trei ediții?

SUBIECTUL II

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = 5X^3 + 14X^2 + 7X - 2$.

- **a)** Să se arate calculeze $f(-2)$.
- **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X + 2$.
- **c)** Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

- **a)** $e^{3x} - 2e^{2x} - 13e^x - 10 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- **b)** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 64$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

SUBIECTUL III

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1-3a & 6a \\ -2a & 1+4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.

b) Pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

c) Să se determine $(X(1))^2$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$

SUBIECTUL IV

Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ de muchie 6 cm, O punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului BCD.

a) Să se calculeze volumul tetraedrului $ABCD$.

b) Se fixează punctul H pe segmentul $[AO]$ situat la distanță egală de toate fețele tetraedrului. Să se determine distanța dintre punctele H și A.