Varianta 10

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se considerŭ polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

a) Să se calculeze $f(2)$.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.

c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuația $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{-x} = -11$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x-2y-1 = 0$ și $d_2 : 2x-3y+1 = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta -3.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $B^2 = -2B$.

b) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = (-2)^{n-1}B$.

c) Să se calculeze determinantul matricei B^n.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{5x^4 + 2x + 1}{x^4}$.

a) Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g.

b) Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g.

c) Să se determine derivata $g'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2. Se definește șirul (I_n) astfel:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+10}\,dx \text{ și } I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\,dx,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

a) Să se calculeze I_0 și I_1.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + 10I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy - 4x - 4y + 20$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea "$\star$" este asociativă.

b) Să se arate că $x \star \dfrac{4x - 15}{x - 4} = 5$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

c) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = (x-4)^n + 4.$$