Varianta 2

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + aX^2 + bX + 6$, $a,\ b \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se determine a și b astfel încât $f(1) = 0$ și $f(-2) + 30 = 0$.
- **b)** Pentru $a = -2$ și $b = -5$ să se afle câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 + 1$.
- **c)** Pentru $a = -2$ și $b = -5$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuația $4^{2x} - 2 \cdot 4^x + 6 \cdot 4^{-x} - 5 = 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-3, 3)$, $B(5, -3)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.

- **a)** Să se determine panta dreptei AB.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin C și are panta $\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se arate că $B^2 = 5B$.
- **b)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = 5^{n-1}B$.
- **c)** Să se determine matricea $A = B + B^2 + \cdots + B^{100}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcțiile $f,\ F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \ln x$ și $F(x) = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}$.

- **a)** Să se calculeze $F(1)$.
- **b)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.
- **c)** Să se calculeze $\int_1^e f(x)\, dx$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$.
Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x,\ y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se arate că legea "$\star$" este asociativă și comutativă.
- **b)** Să se determine elementul neutru al legii "$\star$".
- **c)** Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$