Varianta 5

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră polinomul cu coeficienți reali $f = X^3 + mX^2 + nX + 9$, $m, n \in \mathbb{R}$.

- **a)** Să se determine m și n astfel încât $f(1) = 0$ și $f(2) + 21 = 0$.
- **b)** Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.
- **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $f(x) = 0$.

2. Să se rezolve ecuația $3^x - 4 + 3 \cdot 3^{-x} = 0$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-4, 4)$, $B(4, -2)$ și C mijlocul segmentului $[AB]$.

- **a)** Să se determine coordonatele punctului C.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele A și B.

SUBIECTUL II

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine matricea $B = A + 2A^2 + \cdots + 100A^{100}$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât determinantul matricei $A + xI_2$ să fie egal cu zero.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x$.

a) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se stabilească semnul funcției f'.

c) Să se precizeze intervalele de monotonie ale funcției f și să se arate că $x_0 = -2$ este punct de minim al lui f.

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $7 \star (-2)$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \star x = 12$.

c) Să se arate că $x \star \dfrac{-4x - 15}{x + 4} = -3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$.

d) Să se determine $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \star e = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

e) Să se demonstreze că mulțimea $G = (-4, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\star$"