## Varianta 6

Profil uman

### SUBIECTUL I

**1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, $a$, $b$, $c$ parametri reali. Să se determine $a$, $b$ și $c$ astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 18, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

**2.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Să se calculeze $A^2$.
- **b)** Să se determine matricea $B = 4A^3 + 3A^2 + I_2$.

**3.** În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 3x-8y-3 = 0$ și $d_2 : 5x+2y-5 = 0$.

- **a)** Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- **b)** Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 2)$ și are panta 3.

### SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = X^2 + X + 1$ care are rădăcinile $x_1$, $x_2 \in \mathbb{C}$.

**a)** Să se calculeze $x_1 + x_2$.

**b)** Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = 1$.

**c)** Să se calculeze $x_1^{10} + x_2^{10}$.

### SUBIECTUL III

**1.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$.

- **a)** Să se determine derivata $f'$.
- **b)** Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$.
- **c)** Să se demonstreze că există $c \in (-2, 0)$ astfel încât $f''(c) = 0$.

**2.** Se definește șirul $(I_n)$ astfel:

$I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ și $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

- **a)** Să se calculeze $I_0$ și $I_1$.
- **b)** Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

### SUBIECTUL IV

În $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste $\mathbb{R}$, se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

**a)** Pentru orice $a$, $b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.

**b)** Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$