

Varianta 7

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + bx + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 22, \quad \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- a) Să se calculeze A^2 .
- b) Să se determine matricea $B = 5A^4 + 2A + I_2$.
3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 5x - 2y + 2 = 0$ și $d_2 : 2x + 3y - 3 = 0$.
- a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.
- b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 1)$ și are panta 5.

SUBIECTUL II

Se consideră polinomul $f = X^2 - X + 1$ care are rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

- a) Să se calculeze $x_1 + x_2$.
- b) Să se arate că $x_1^3 = x_2^3 = -1$.
- c) Să se calculeze $x_1^{10} + x_2^{10}$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$.

- a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- b) Să se determine $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.
- c) Să se arate că $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.
- d) Să se calculeze $\int_0^3 f(x) dx$.

SUBIECTUL IV

În $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbb{R} , se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 - 3a & 6a \\ -2a & 1 + 4a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- a) Să se calculeze determinantul matricei $X(a)$.
- b) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(ab + a + b)$.
- c) Să se determine $(X(1))^2$.
- d) Să se demonstreze, utilizând metoda inducției matematice, că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X(1))^n = X(2^n - 1).$$