Varianta 8

Profil uman

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^7 + bx^3 + c$, a, b, c parametri reali. Să se determine a, b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 7, \quad f''(1) = 42.$$

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se determine matricea $B = 8A^7 + 4A^3 + I_2$.

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1 : 2x+y-3 = 0$ și $d_2 : 3x+y-4 = 0$.

a) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al celor două drepte.

b) Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta 5.

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $C_n^2 = 10$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

b) $\log_2(x + 2) + \log_2 x = 3$, $x \in (0, \infty)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + aX + 1$, $a \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, unde x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f. Să se arate că $S_3 + S_2 + aS_1 + 3 = 0$.

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{6x^5 + 3x^2 + 1}{x^5}$.

a) Să se arate că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției g.

b) Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției g.

c) Să se determine derivata g'.

d) Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 g(x)\, dx$.

SUBIECTUL IV

Se consideră mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ pe care se definește legea de compoziție $x \star y = x + y + 3$, pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că legea ”$\star$” este comutativă.

b) Să se arate că legea ”$\star$” este asociativă.

c) Să se arate că $e = -3$ este elementul neutru al legii ”$\star$”.

d) Să se verifice că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată relația $x \star (-x - 6) = -3$.

e) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \star x \star \ldots \star x}_{\text{de 100 ori } x} = 397$.