

**SIMULARE - MARTIE**  
**Varianta 1**

Profilul economic, fizică-chimie, chimie-biologie

**SUBIECTUL I**

Fie  $a, b \in (0, \infty)$  și funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x - 1}$ .

1. Să se calculeze:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$ .

c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ .

2. a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

b) Să se arate că funcția  $f'$  are pe  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  două rădăcini distincte.

c) Să se determine punctul de maxim al funcției  $f$ .

**SUBIECTUL II**

Fie șirurile  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$  definite astfel:  $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  și  $b_n = \ln a_n$ ,  $n \geq 1$ .

1. Să se arate că  $(\exists) q \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a_{n+1} = qa_n$ ,  $(\forall) n \geq 1$ .

2. a) Să se calculeze  $b_{n+1} - b_n$ ,  $n \geq 1$ .

b) Să se precizeze care dintre cele două șiruri este progresie aritmetică.

3. Să se calculeze:

a)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b)  $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ .

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \sum_{k=1}^n b_k$ .

**SUBIECTUL III**

Pentru  $x \in \mathbb{R}$  se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$ .

1. Să se determine valorile lui  $x$  pentru care  $\det A = 0$ .

2. a) Să se calculeze  $A^2$ .

b) Să se demonstreze că  $A^2 = (2x - 4)A - \det A \cdot I_2$ .

3. Să se arate că  $A^2 = (2x - 4)A$  dacă și numai dacă  $x \in \{1; 3\}$ .

4. Dacă  $x = 3$ , să se demonstreze că  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ .

**SUBIECTUL IV**

Se dă funcția  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x\sqrt{2} - \sqrt{3})^{10}$ .

1. Să se calculeze  $\int f(x) dx$ ,  $x \in [0, 3]$ .

2. Fie  $F : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  o primitivă a lui  $f$ .
  - a) Să se studieze monotonia funcției  $F$ .
  - b) Să se determine punctele de extrem ale funcției  $F$ .
3. Să se rezolve ecuația  $F''(x) < 0$ ,  $x \in [0, 3]$ .
4. Să se demonstreze că tangentele la graficul funcției  $F$  în punctele  $A(0, F(0))$  și  $B(\sqrt{6}, F(\sqrt{6}))$  sunt paralele.