Soluţie-profil economic

Varianta 2.

Rezolvare

I. **1**.Condiţii: x+1≥0, x≥–1⇒x∈[–1,+∞)(1)

$$16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}}=2^4\left(2^{-2}\right)^{\frac{5-\frac{x}{4}}{2}}=2^4\cdot 2^{-\left(5-\frac{x}{4}\right)}=2^{4-5+\frac{x}{4}}=2^{\frac{x}{4}-1}.$$

Se obţine ecuaţia exponenţială: $2^{\frac{x}{4}-1}=2^{\sqrt{x+1}}$. Din injectivitatea funcţiei exponenţiale, avem: $\frac{x}{4}-1=\sqrt{x+1}$, care este o ecuaţie iraţională.

Condiţia: $\frac{x}{4}-1\geq 0$ ⇒x≥4 ⇒x∈[4,+∞)(2). Ridicăm la pătrat în ecuaţia iraţională şi se obţine: $\frac{x^2}{16}-\frac{x}{2}+1=x+1$ ⇒ x^2–24x=0⇒x(x–24)=0 cu x_1=0 şi x_2=24.

Soluţia va fi x=24 deoarece x_1 nu verifică condiţia (2).

2. Soluţia 1. Considerăm ecuaţia: $x^4+x^3+\hat{2}x^2+x+\hat{1}=\hat{0}$ care este o ecuaţie simetrică şi nu are soluţia x=$\hat{0}$. %mpărţim cu x^2 şi rezultă:

$x^2+x+\hat{2}+\frac{\hat{1}}{x}+\frac{\hat{1}}{x^2}=\hat{0}$. Notăm $x+\frac{\hat{1}}{x}=y\Rightarrow x^2+\frac{\hat{1}}{x^2}=y^2-\hat{2}$. Obţinem:

$$y^2-\hat{2}+y+\hat{2}=\hat{0}\Rightarrow y(y+\hat{1})=\hat{0}\Rightarrow y_1=\hat{0},\ y_2=\hat{1}$$

$$x+\frac{\hat{1}}{x}=\hat{0}\Rightarrow x^2=-\hat{1}\Leftrightarrow x^2=\hat{4}\Rightarrow x_1=\hat{2},\ x_2=\hat{3}$$

$x+\frac{\hat{1}}{x}=\hat{4}\Rightarrow x^2-\hat{4}x+\hat{1}=\hat{0}\Leftrightarrow x^2+x+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow\Delta=\hat{1}-\hat{4}=-\hat{3}=\hat{2}$ care nu este pătrat perfect şi ecuaţia nu are soluţii în $\mathbf{Z}_5$.

Obţinem: $f=\left(x-\hat{2}\right)\left(x-\hat{3}\right)\left(x^2+x+\hat{1}\right)$ sau $f=\left(x+\hat{2}\right)\left(x+\hat{3}\right)\left(x^2+x+\hat{1}\right)$

Soluţia 2. Rădăcinile se află printre divizorii termenului liber a_0=$\hat{1}$. Avem:

$\hat{1}\cdot\hat{1}=\hat{1},\ \hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{1},\ \hat{4}\cdot\hat{4}=\hat{1}$. Verificăm:

$f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{1}+\hat{1}=\hat{1}\neq\hat{0}$

$f(\hat{2})=\hat{1}+\hat{3}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$ rezultă: $x-\hat{2}\,/\,f$

$f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{3}+\hat{1}=\hat{0}$ rezultă: $x-\hat{3}\,/\,f$

$f(\hat{4})=\hat{1}+\hat{4}+\hat{2}+\hat{4}+\hat{1}=\hat{2}\neq\hat{0}$

Avem $\left(x-\hat{2}\right)\left(x-\hat{3}\right)/\,f \Rightarrow \left(x^2+\hat{1}\right)/\,f$. Efectuăm împărţirea:

$\left(x^4+x^3+\hat{2}x^2+x+\hat{1}\right):\left(x^2+\hat{1}\right)=x^2+x+\hat{1}$

$\hat{4}x^4 \quad +\hat{4}x^2$

$/ \quad x^3+x^2 \quad x$

$4x^3 \quad \hat{4}x$

$/ \quad x^2 \quad +\hat{1}$

$\hat{4}x^2 \quad +\hat{4}$

$/ \quad /$

f=$\left(x+\hat{3}\right)\left(x+\hat{2}\right)\left(x^2+x+\hat{1}\right)$

3.a) A(x).A(y)=$\begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2-y & 1-y \\ 2(y-1) & 2y-1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 4-2x-2y+xy+2y-2-2xy+2 & 2-2y-x+xy+2y-1-2xy+x \\ 4x-2xy-4+2y+4xy-4x-2y+2 & 2x-2xy-2+2y+4xy-2x-2y+1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-xy & 1-xy \\ 2(xy-1) & 2xy-1 \end{pmatrix}=A(xy)$$

b) Din a)⇒A^2(x)=A(x)A(x)=$\begin{pmatrix} 2-x^2 & 1-x^2 \\ 2\left(x^2-1\right) & 2x^2-1 \end{pmatrix}$

Observăm că: $A^n(x)=\begin{pmatrix} 2-x^n & 1-x^n \\ 2\left(x^n-1\right) & 2x^n-1 \end{pmatrix}$

Verificăm prin inducţie: $A^{n+1}(x)=A^n(x)A(x)\xRightarrow{\text{din a)}}A^{n+1}(x)=\begin{pmatrix} 2-x^{n+1} & 1-x^{n+1} \\ 2\left(x^{n+1}-1\right) & 2x^{n+1}-1 \end{pmatrix}$

a) Verificăm că (∀)A(x),A(y)∈E⇒A(x)A(y)∈E, unde x,y∈$\mathbf{R}^*$.

Din a) rezultă $A(xy)=\begin{pmatrix} 2-xy & 1-xy \\ 2(xy-1) & 2xy-1 \end{pmatrix} \in E$

Verificăm axiomele grupului:

G_1: -înmulţirea matricelor este asociativă

G_2: -element neutru este matricea unitate: $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x=1\in\mathbf{R}^*$

G_3: -trebuie să verificăm că $(\forall)x\in\mathbf{R}^*$, $A(x)\in E$ este nesingulară.

Calculăm $\det A=d=\begin{vmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{vmatrix}=4x-2-2x^2+x-2x+2+2x^2-2x=x\neq 0\Rightarrow A$ nesingulară$\Rightarrow$

$(\ni)A^{-1}(x)=\frac{1}{d}A^*(x)$. Calculăm $A^{-1}(x)$:

$A_{11}=(-1)^{1+1}(2x-1)=2x-1$ $\qquad$ $A_{21}=(-1)^{2+1}(1-x)=-(1-x)$

$A_{12}=(-1)^{1+2}(2x-2)=-2(x-1)$ $\qquad$ $A_{22}=(-1)^{2+2}(2-x)=2-x$

$$A^{-1}(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{2x-1}{x} & \dfrac{x-1}{x} \\ \dfrac{2(1-x)}{x} & \dfrac{2-x}{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\dfrac{1}{x} & 1-\dfrac{1}{x} \\ 2\left(\dfrac{1}{x}-1\right) & 2\dfrac{1}{x}-1 \end{pmatrix}\in E\Rightarrow G_3\text{-adevărată}$$

G_4: $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, $(\forall)\in E$, evidentă

Din G_1-G_4 rezultă $(E,\cdot)$ grup abelian.

II a) Pentru ca f să admită un extrem în punctul x=0 trebuie ca $f'(0)=0$ şi să-şi schimbe semnul. Calculăm $f'(x)=\dfrac{(2x+m)(x-1)-\left(x^2+mx+n\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-m-n}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0\Rightarrow -m-n=0\Rightarrow m=-n$ şi din enunţ avem $f(0)=1\Rightarrow\dfrac{n}{-1}=1\Rightarrow n=-1$ şi $m=+1$

b) Avem $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

Intersecţia cu axele: $\cap Oy$ $\quad A(0,1)$

$\cap Ox$ $x^2+x-1=0 \Rightarrow \Delta=1+4=5 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow B\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},0\right), C\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},0\right)$. Limite la capetele domeniului de definiţie: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$f nu are asimptote orizontale.

Asimptote oblice: y=mx+n, $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-1}{x^2-x}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2 \Rightarrow$dreapta y=x+2 asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$.

Asimptote verticale în punctul x=1:

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\frac{1}{-0}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\frac{1}{+0}=+\infty \Rightarrow$ dreapta x=1 asimptotă verticală.

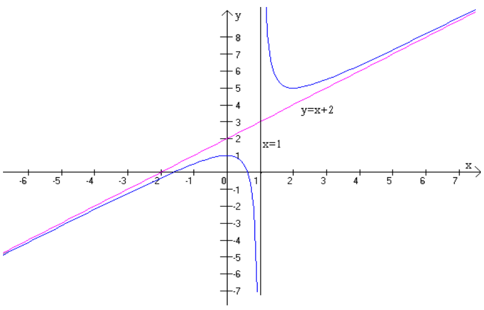
$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, din f '(x)=0⇒x(x–2)=0⇒$x_1=0$ şi $x_2=2$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

Tabelul de variaţie:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		2		$+\infty$
f'(x)	+		+	+	0	–	–	–	/	–	0	+	+
f''(x)	–	–	–	–	–	–	–	–	/	+	+	+	+
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Graficul funcţiei:



c)Ecuaţia tangentei la grafic t:$y-y_0=m(x-x_0)$

$y_0=f(3)=11/2$, $x_0=3$, $m=f'(3)=3/4$

t: $y-\frac{11}{2}=\frac{3}{4}(x-3)$

3x–4y+13=0

d)Dacă $x \in [2,5]$ atunci $f(x)>0$ şi

$$A(f)=\int_2^5 f(x)dx=\int_2^5 \frac{x^2+x-1}{x-1}dx=\int_2^5\left(x+2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x+\ln(x-1)\right]\Bigg|_2^5=$$

$$=\frac{25}{2}+10+\ln 4-2-4-\ln 1=\frac{33}{2}+\ln 4$$

III. Coordonatele centrului $M_0(x_0,y_0)$ vor fi:

$$\begin{matrix} x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{matrix}\; ; \quad \begin{matrix} x_0=\dfrac{3-1}{2}=1 \\ y_0=\dfrac{2+6}{2}=4 \end{matrix}$$

; $M_0(1,4)$. Raza cercului va fi

$$r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{2};\; r^2=\frac{(-1-3)^2+(6-2)^2}{4}=\frac{32}{4}=8$$

Ecuaţia cercului este C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$(x-1)^2+(y-4)^2=8 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=8 \Rightarrow x^2+y^2-2x-8y+9=0$

Ecuaţia tangentei la cerc se obţine prin dedublare din ecuaţia cercului:

t: $xx_1+yy_1-\frac{1}{2}(x+x_1)-\frac{1}{2}(y+y_1)+r^2=0$. Ecuaţia tangentei: $3x+2y-x-3-4y-8+9=0 \Rightarrow$

$2x-2y-2=0$. Împărţim ecuaţia cu 2 şi avem t: $x-y-1=0$.