Soluţie-profil economic

Varianta 3.

Rezolvare:

I. **1**. Utilizând proprietatea progresiilor aritmetice: $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=...$
avem: $a_6+a_{15}=a_9+a_{12}$ şi ştiind că $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$, obţinem: $a_6+a_{15}=a_9+a_{12}=10$. Se obţine: $S_{20}=10(a_6+a_{15})=100$.

2. Sistemul are şi soluţii nebanale dacă determinantul matricei sistemului este nul.

$\det A=\begin{vmatrix} 4 & m & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4-2m+4=8-2m$. Obţinem: $8-2m=0 \Rightarrow m=4$.

Minorul principal $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=4\neq 0$, luăm ca necunoscute principale x şi y, iar $z=\alpha\in\mathbf{R}$.

Sistemul va fi un sistem compatibil nedeterminat.

$\begin{cases} 4x+4y=0 \\ y=\alpha \end{cases}$, cu soluţia $x=-y=-\alpha$. $S=(-\alpha,\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbf{R}$.

3.a) Din teorema împărţirii polinoamelor, avem:

$f=(x-a)(x-b)q+r$, unde grad $r<\text{grad}(x-a)(x-b)=2 \Rightarrow r=cx+d$ şi $f=(x-a)(x-b)+cx+d$.

Calculăm: $f(a)=ca+d$ (1) şi $f(b)=cb+d$ (2). Obţinem:

$f(a)-f(b)=c(a-b) \Rightarrow c=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$. Înlocuim în (1) şi avem:

$$f(a)=a\frac{f(a)-f(b)}{a-b}+d \Rightarrow d=\frac{af(a)-bf(b)-af(a)+af(b)}{a-b}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$

Obţinem: $r=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

b) Din: $f=(x-a)(x-b)+cx+d$; $f(a)=0$ şi $f(b)=0 \Rightarrow \begin{cases} ca+d=0 \\ cb+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \end{cases}$ şi rezultă

$r=0 \Rightarrow (x-a)(x-b)/f$.

II. 1. Tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa Ox dacă panta tangentei la grafic, în x=1, este nulă$\Rightarrow m=f\,'(1)=0$. Avem:

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+3)^2-2(x^2+ax)(x+3)}{\left(x+3\right)^4}=\frac{(x+3)\left[(2x+a)(x+3)-2(x^2+ax)\right]}{\left(x+3\right)^4}=$$

$$=\frac{(x+3)(2x^2+6x+ax+3a-2x^2-2ax)}{\left(x+3\right)^4}=\frac{x(6-a)+3a}{(x+3)^3}$$

f'(1)=0⇒6–a+3a=0⇒a= –3.

2. Avem: $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{(x+3)^2}$

Semnul funcţiei şi intersecţia cu axele: f(x)=0⇒x^2–3x=0⇒x_1=0, x_2=3

x	–∞		0			3		+∞
f(x)	+	+	0	–	–	0	+	+
			∩Ox şi Oy			∩Ox		

Asimptote orizontale: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$⇒dreapta y=1 asimptotă orizontală

Asimptote verticale: $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)=\dfrac{18}{+0}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)=\dfrac{18}{-0}=-\infty$ ⇒dreapta x= –3 asimptotă verticală

Derivata funcţiei: $f'(x)=\dfrac{\left(2x-3\right)(x+3)^2-2(x^2-3x)(x+3)}{\left(x+3\right)^4}=\dfrac{9(x-1)}{\left(x+3\right)^3}$,f'(x)=0⇒x=1

x	–∞		–3		1		+∞
x–1	–	–	–	–	0	+	+
$(x+3)^3$	–	–	0	+	+	+	+
f '(x)	+	+	/	–	0	+	+

Derivata a doua:

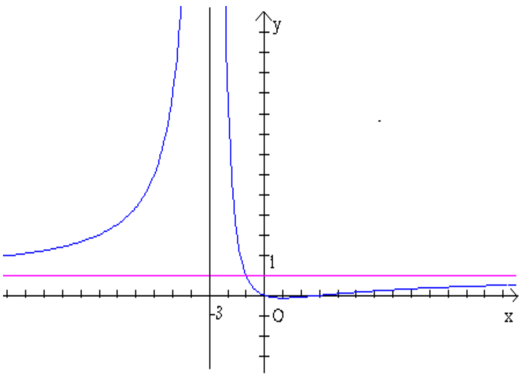
$$f''(x)=\frac{9(x+3)^3-3(9x-9)(x+3)^2}{(x+3)^6}=\frac{9(x+3)^2(x+3-3x+3)}{(x+3)^6}=\frac{9(-2x+6)}{(x+3)^4}$$

f''(x)=0⇒x=3.

Tabelul de variaţie al funcţiei:

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
f'(x)	+	+	/	–	–	–	0	+	+	+	+
f''(x)	+	+	/	+	+	+	+	+	0	–	–
f(x)	1	$\nearrow$	$+\infty$/$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	–1/8	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Graficul funcţiei:



2. Vol C(f) = $=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx=$

$$=\pi\int_1^e \ln^2 x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'dx=-\frac{1}{x}\ln^2 x\Big|_1^e+2\int_1^e\frac{1}{x^2}\ln x\,dx=-\frac{1}{e}+2\int_1^e\ln x\left(-\frac{1}{x}\right)'dx=$$

$$=-\frac{1}{e}-2\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e+2\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}-\frac{2}{e}-\frac{2}{x}\Big|_1^e=-\frac{3}{e}-\frac{2}{e}+2=2-\frac{5}{2}=\frac{2e-5}{2}.$$

III. Pentru ca A şi B să fie simetrice faţă de dreapta h trebuie ca d(A,d)=d(B,d) şi AB$\perp$d. Din formula distanţei de la un punct M(x_0,y_0) la o dreaptă d: ax+by+c=0,

$d(M,d)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, obţinem: $d(A,d)=\frac{|2\cdot(-5)-1\cdot 3+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{3}}$ şi

$d(B,d)=\frac{\left|2\cdot\frac{11}{5}-1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+4\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{3}}$, adică d(A,d)=d(B,d). (1)

Pentru ca AB$\perp$d trebuie ca $m_{AB}=-\frac{1}{m_d}$; (2)

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m_{AB}=\frac{-\frac{3}{5}-3}{\frac{11}{5}+5}=\frac{-18}{36}=-\frac{1}{2}$. Din d: y=2x+4⇒$m_d$=2, deci (2) este adevărată.

Din (1) şi (2) ⇒ A şi B sunt simetrice.