Soluţie-profil economic

Varianta 5.

Rezolvare:

I. **1**. Condiţii: $x^2-4\neq 0$, $x\neq \pm 2$

Inecuaţia va fi echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\le 1 \\ \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+4-x^2+4}{x^2-4}\le 0 \\ \dfrac{x^2-5x+4+x^2-4}{x^2-4}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5x+8}{x^2-4}\le 0 \\ \dfrac{2x^2-5x}{x^2-4}\ge 0 \end{cases}$$

x	−∞		−2		8/5		2		+∞
−5x+8	+	+	+	+	0	−	−	−	−
x^2-4	+	+	0	−	−	−	0	+	+
I_1	+	+	/	−	0	+	/	−	−

$S_1=(-2,8/5]\cup(2,+\infty)$

x	−∞		−2		0		2		5/2		+∞
$2x^2-5x$	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+
x^2-4	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+

$S_2=(-\infty,-2)\cup[0,2)\cup[5/2,+\infty)$

$S=S_1\cap S_2=[0,8/5]\cup[5/2,+\infty)$

2. Din relaţiile lui Viete, avem:

$x_1+x_2+x_3=-m$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1 \Rightarrow x_2(x_1+x_3)+x_1x_3=-1$

$x_1x_2x_3=3 \quad \Rightarrow x_1x_3=3/x_2 \quad \Rightarrow 2x_2^2+3/x_2=-1 \Rightarrow$

şi $x_1+x_3=2x_2$

$2x_2^3+x_2+3=0$, care are o rădăcină $x_2=-1$. Atunci:

$x_1+x_3=-2$ şi $x_1x_3=-3$ şi formăm ecuaţia de gradul II: $y^2-Sy+P=0\Rightarrow$

$y^2+2y-3=0$ care are soluţiile $y_1=1$, $y_2=-3$

Atunci; $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-3$ şi din prima relaţie obţinem: $1-1-3=-m \Rightarrow m=3$.

3. Calculăm determinantul matricei A:

$$d=\begin{vmatrix}1 & -m & 1\\ 1 & -2 & 1\\ m & m^2 & -2\end{vmatrix}=4-m^2+m^2+2m-m^2-2m=4-m^2$$

Pentru $4-m^2=0$, $m=\pm 2 \Rightarrow d=0$.

Pentru m=2 $\Rightarrow$ $d_A=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=8\Rightarrow rangA=2$

$d_{c_1}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=40\neq 0\Rightarrow rang\,\overline{A}=3$ şi sistemul este incompatibil.

Pentru m= –2 $\Rightarrow$ $d_A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4\Rightarrow rangA=2$

$d_c=\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\end{vmatrix}=0$ şi sistemul este compatibil nedeterminat. Necunoscute principale x şi y, iar $z=\alpha\in\mathbf{R}$. Sistemul principal va fi:

$$\begin{cases}x+2y=-4-\alpha\\ x-2y=-1-\alpha\end{cases} \qquad x=\frac{-5-2\alpha}{2} \qquad \frac{-5-2\alpha}{2}+2y=-4-\alpha$$

$$2x\ / \ =-5-2\alpha \qquad -5-2\alpha+4y=-8-2\alpha\Rightarrow 4y=-3\Rightarrow y=-\frac{3}{4}$$

Soluţia: $\left(\frac{-5-2\alpha}{2},-\frac{3}{4},\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Pentru $m\neq\pm 2$ sistemul este sistem Cramer.

$$d_x=\begin{vmatrix}2m & -m & 1\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & m^2 & -2\end{vmatrix}=8m-2m-m^2+4-2m^3+2m=(2m+1)(4-m^2)$$

$$d_y=\begin{vmatrix}1 & 2m & 1\\ 1 & -1 & 1\\ m & m^2 & -2\end{vmatrix}=2+2m^2+m^2+m-m^2+4m=(2m+1)(m+2)$$

$$d_z=\begin{vmatrix}1 & -m & 2m\\ 1 & -2 & -1\\ m & m^2 & 2\end{vmatrix}=-4+m^2+2m^3+4m^2+m^2+2m=2(m+2)(m^2+m-1)$$

Soluţia:

$$\left(x=\frac{d_x}{d}=2m+1, y=\frac{d_y}{d}=\frac{2m+1}{2-m}, z=\frac{d_z}{d}=\frac{2(m^2+m-1)}{2-m}\right)$$

II. **1**. x=1 asimptotă verticală ⇒1+c=0⇒c=–1 şi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\infty$

y=x+2 asimptotă oblică ⇒$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x}=1$ şi

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+b}{x-1}-x\right)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(a+1)+b}{x-1}=2$, rezultă

a+1=2⇒a=1. Punctul P∈G_f⇒f(2)=6⇒$\frac{4+2+b}{2-1}=6 \Rightarrow b=0$

b) Pentru a=1,b=0 şi c=–1 avem f:**R**–{1}→**R**, $f(x)=\frac{x^2+x}{x-1}$

Semnul funcţiei şi intersecţia cu axele:

f(x)=0 ⇒x^2+x=0 ⇒x_1=0, x_2=–1

x	–∞		–1		0		1		+∞
x^2+x	+	+	0	–	–	–	0	+	+
x–1	–	–	–	–	–	–	0	+	+
f(x)	–	–	0	–	0	+	/	+	+
			$\cap Ox$		$\cap Ox, Oy$				

Limite la capetele domeniului de definiţie:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ⇒f nu are asimptote orizontale

Asimptote oblice: y=mx+n, $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x^2-x}=1$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1}=2$$

dreapta y=x+2 este asimptotă orizontală spre –∞ şi +∞.

Asimptote verticale în x=1

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\dfrac{2}{-0}=-\infty \\[2ex] \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\dfrac{2}{+0}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{dreapta x=1 asimptotă verticală}$$

Derivata I.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+x-1-x^2-x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

f'(x)=0⇒x^2–2x–1=0, Δ=4+4=8, $x_{1,2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

Derivata a II-a

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x^2-2x-1)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x^2-2x+1-2x^2+4x+2)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)(-x^2+2x+3)}{(x-1)^4}=\frac{2(-x^2+2x+3)}{(x-1)^3}$$

f''(x)=0⇒–x^2+2x+3=0, Δ=4+12=16

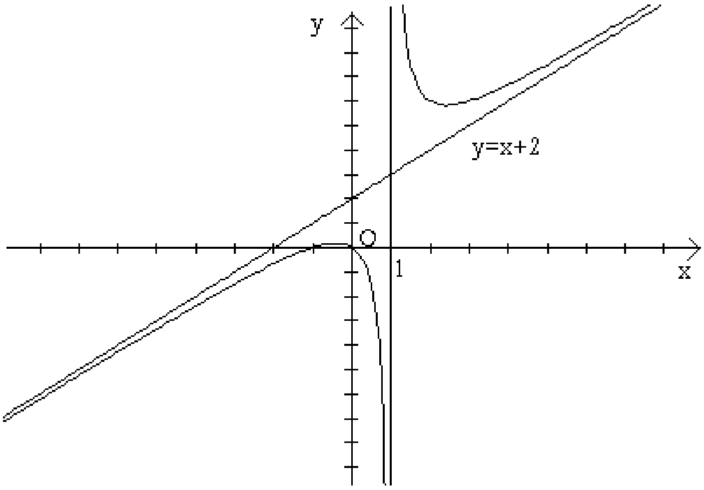
x	-∞		-1		1		3		+∞
$-x^2+2x+3$	+	+	0	-	-	-	0	+	+

$x_1=\dfrac{-2-4}{-2}=3,\ x_2=\dfrac{-2+4}{-2}=-1$

Tabloul de variaţie al funcţiei

x	–∞		–1		$1-\sqrt{2}$		0		1		$1+\sqrt{2}$		3		+∞
f'(x)	+	+	+	+	0	–	–	–	/	–	0	+	+	+	+
f''(x)	–	–	0	+	+	+	+	+	/	–	–	–	0	+	+
f(x)	–∞	↗	0	↗	M	↘	0	↘	–∞/+∞	↘	m	↗	6	↗	+∞

Graficul funcţiei:



c)Ecuaţia tangentei la grafic

t: $y-y_0=m(x-x_0)$

$y_0=f(-1)=0$, $x_0=-1$,

$$m=f'(-1)=\frac{1+2-1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$t: y=\frac{1}{2}(x+1)$$

$x-2y+1=0$

d) Considerăm funcţiile: $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$, g(x)=x+2 ⇒ g(x)–f(x)≠0

Aria:

$$A_{f,g}=\int_{-1}^{0}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x+2-\frac{x^2+x}{x-1}\right)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2+2x-x-2-x^2-x}{x-1}dx=$$

$$=-\int_{-1}^{0}\frac{2}{x-1}dx=\ln\left|x-1\right|\Big|_{-1}^{0}=\ln 2$$

III. **1**. Soluţia 1.Luăm h:4x+3y–6=0 şi a: 4x–3y–6=0

$$d(C,h)=\frac{\left|4\cdot4+3\cdot0-6\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$

C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Rightarrow (x-4)^2+y^2=4 \Rightarrow x^2-8x+16+y^2=4$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases}x^2+y^2-8x=-12\\4x-3y-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{4x-6}{3}\\x^2+\dfrac{16x^2-48x+36}{9}-8x=-12\end{cases}$$

$25x^2-120x+144=0 \Rightarrow (5x-12)^2=0 \Rightarrow$ecuaţia are o singură soluţie, deci cercul este tangent la dreapta dată.

Soluţia 2. Calculăm distanţa de la C la a

$$d(C,a)=\frac{\left|4\cdot4-3\cdot0-6\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$$ ⇒d(C,h)=d(C,a)⇒cercul este tangent dreptei a.