Soluţie-matematică-fizică

Varianta 1.

Rezolvare:

I. **1.** Condiţii $2-x\neq 0 \Rightarrow x\leq 2 \Rightarrow x\in(-\infty,2]$

$x\geq 0 \Rightarrow x\in[0,+\infty) \Rightarrow D=[0,2]$

Ridicăm la pătrat: $2-x<x^2 \Rightarrow x^2+x-2>0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2	+	+	0	–	0	+	+

$x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ $S=[(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)\cap[0,2]=(1,2]$

2. $\begin{cases} 2^{2x}-5\cdot 3^{2x}=-1 \\ 2^{2x}+2^x\cdot 3^x=6 \end{cases}$.

Notăm $2^x=z$ şi $3^y=t$ şi obţinem un sistem omogen:

$$\begin{cases} z^2-5t^2=-1/\cdot 6 \\ z^2+tz=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z^2-30t^2=-6 \\ \underline{z^2+tz\quad=\quad 6} \end{cases}$$

$$7z^2+tz-30t^2=0/:t^2;\quad t\neq 0$$

$$\frac{7z^2}{t^2}+\frac{z}{t}-30=0$$

Notăm: $\frac{z}{t}=u$, avem: $7u^2+u-30=0$ cu soluţiile $u_1=-\frac{15}{7}$ şi $u_2=2$.

Revenim la z şi t:

$$1)\begin{cases} \frac{z}{t}=2 \\ z^2+tz=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2t \\ 4t^2+2t^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2t \\ 6t^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2}=\pm 2 \\ t_{1,2}=\pm 1 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \frac{z}{t}=-\frac{15}{7} \\ z^2+tz=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{15}{7}t \\ \frac{225}{49}t^2-\frac{15}{7}t^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{15}{7}t \\ 120t^2=294 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{1,2}=\mp\frac{14}{2\sqrt{5}} \\ t_{1,2}=\pm\frac{7}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Aflăm necunosutele x şi y: $2^x=2 \Rightarrow x=1$ şi $3^y=1 \Rightarrow y=0$

3. $x*y=x+y-5xy$

1^0 asociativitatea:

$(x*y)*z=(x+y-5xy)*z=x+y-5xy+z-5(x+y-5xy)z=x+y+z-5(xy+xz+yz)+25xyz$

$x*(y*z)=x*(y+z-5yz)=x+y+z-5yz-5x(y+z-5yz)=x+y+z-5(xy+xz+yz)+25xyz$

20 comutativitatea: $x*y=x+y-5xy=y+x-5yx=y*x$

30 element neutru:

$e*x=x \Rightarrow e+x-5ex=x \Rightarrow e(1-5x)=0 \Rightarrow e=0\in\mathbf{Q}$ pentru $x\neq\frac{1}{5}$

4^0 elemente simetrice:

$x*x'=e \Rightarrow x+x'-5xx'=0 \Rightarrow x'(1-5x)=-x \Rightarrow x'=\dfrac{x}{5x-1}\in Q,$ pentru $x\neq\dfrac{1}{5}$

Pentru $a=\frac{1}{5}$ avem: $\left(Q-\left\{\frac{1}{5}\right\},*\right)$-grup comutativ.

II. **1.** a) $f(x)=(x^2+ax+1)e^x$. Dacă $f'(x)\geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+1)e^x=e^x[x^2+x(2+a)+a+1]$

$e^x>0 \Rightarrow x^2+x(2+a)+a+1\neq 0, (\forall)x\in\mathbf{R} \Rightarrow \Delta\leq 0$

$\Delta=4+4a+a^2-4a-4=a^2 \Rightarrow a^2\leq 0 \Rightarrow a=0$

b) $f(x)=(x^2+1)e^x$. Ecuaţia tangentei la grafic: $y-y_0=m(x-x_0)$, unde: $x_0=0$, $y_0=f(0)=1$ şi $m=f'(0)=1$. Tangenta va fi: $y-1=x \Rightarrow x-y+1=0$

c) <u>bijectivitatea:</u> g strict crescătoare $\Rightarrow$ g bijectivă

$g'(x)=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x+1)^2e^x$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{-x}}=0;\ \lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'(x	+	+	0	+	+

g strict crescătoare $\Rightarrow$ g bijectivă

Din: g bijectvă, g continuă, g derivabilă rezultă g^{-1} este derivabilă.

$$\left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{1}=1$$

2. Calculăm o primitivă a lui f:[0,1]→**R**, f(x)=x^2arctg x.

$$F(x)=\int x^2 arctgx dx=\int\left(arctgx\right)\left(\frac{x^3}{3}\right)' dx=\frac{x^3}{3}arctrgx-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}arctgx-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}arctgx-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\int\frac{\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}arctgx-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

$$\int_0^1 x^2 arctgx dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}arctg1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{3}arctg0-\frac{1}{6}\ln 1=$$

$$=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{6}\ln 2-\frac{1}{6}$$

III. a) Verificăm dacă T∈H: $\frac{8}{4}-\frac{9}{9}-1=0$

Ecuaţia tangentei se obţine prin dedublarea ecuaţiei hiperbolei:

$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0$ ⇒ t: $\frac{2\sqrt{2}x}{4}-\frac{3y}{9}-1=0\Rightarrow 3\sqrt{2}x-2y-6=0$

b) Asimptotele $y=\pm\frac{b}{a}x$

Calculăm coordonatele punctelor de intersecţie:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ 9x+2y-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{A(2;3)}$$

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ 9x+2y-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-6 \end{cases} \quad \text{B(4;-6)}$$

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|\Delta|,\quad \Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix}=-24,\quad S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot 24=12\,.$$