Soluţie-matematică-fizică

Varianta 3.

Rezolvare:

I. **1.** $f(x)=x^3+(m+1)x^2+2x+m$

Din relaţiile lui Viete, avem:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-m-1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2 \\ x_1x_2x_3=m \end{cases}$$

Pornim de la: $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3)$

şi obţinem:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)–2(x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3)$

Vom avea: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=[-(m+1)]^2-4=m^2+2m-3$

Pentru relaţia a doua pornim de la:

$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+3x_1^2(x_2+x_3)+3x_1(x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^3=$

$$=(x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1^2x_3+3x_1x_2^2+6x_1x_2x_3+3x_1x_3^2+x_2^3+3x_2^2x_3+3x_2x_3^2+x_3^3=$$

$$=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3[x_1x_2(x_1+x_2)+x_1x_3(x_1+x_3)+x_2x_3(x_2+x_3)]+6x_1x_2x_3$$

Din prima relaţie Viete şi din relaţia de mai sus, avem:

$(-m-1)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3-6(m+1+m)$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-m^3-3m^2-3m-1+12m+6 \Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=-m^3-3m^2+9m+5$

Inecuaţia din enunţ va fi:

$-m^3-3m^2+9m+5\le 5-2m$

$m^3+3m^2-11m\le 0 \Rightarrow m(m^2+3m-11)\le 0$ cu rădăcinile $m_1=0$, $m_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{53}}{2}$

m	$-\infty$		m_2		0		m_3		$+\infty$
m	–	–	–	–	0	+	+	+	+
$m^2+3m-11$	+	+	0	–	–	–	0	+	+
$m(m^2+3m-11)$	–	–	0	+	0	–	0	+	+

S=(-4, $\frac{-3-\sqrt{53}}{2}$]∪[0, $\frac{-3+\sqrt{53}}{2}$]

2. Verificăm axiomele inelului:

A_1: $x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$, $(\forall)x,y,z\in\mathbf{Z}$

$x\oplus(y\oplus z)=x+y+z+6$ şi $(x\oplus y)\oplus z=x+y+z+6 \Rightarrow A_1$ este adevărată

A_2: $x\oplus y=y\oplus z$, $(\forall)x,y\in\mathbf{Z}$, evidentă

A_3: $(\exists)e_1\in\mathbf{Z}$ a.î. $(\forall)x\in\mathbf{Z}\Rightarrow x\oplus e_1=x$

$x+e_1+3=x \Rightarrow e_1=-3\in\mathbf{Z} \Rightarrow A_3$ este adevărată

A_4: $(\forall)x\in\mathbf{Z}$, $(\exists)x'\in\mathbf{Z}$ a.î. $x\oplus x'=e_1$

$x+x'+3=-3 \Rightarrow x'=-6-x \Rightarrow x'\in\mathbf{Z} \Rightarrow A_4$ este adevărată

A_5: $x\otimes(y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$, $(\forall)x,y,z\in\mathbf{Z}$

$x\otimes(y\otimes z)=x(yz+3y+3z+6)+3x+3(yz+3y+3z+6)+6=$

$=xyz+3(xy+xz+yz)+9(x+y+z)+24$

$(x\otimes y)\otimes z=(xy+3x+3y+6)z+3(xy+3x+3y+6)+3x+6=$

$= xyz+3(xy+xz+yz)+9(x+y+z)+24$

A_5 este adevărată

A_6: $x\otimes y=y\otimes x$, $(\forall)x,y\in\mathbf{Z}$, evidentă

A_7: $(\exists)e_2\in\mathbf{Z}$ a.î. $(\forall)x\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{x\neq e_1} \Rightarrow x\otimes e_2=x$

$xe_2+3x+3e_2+6=x \Rightarrow e_2(x+3)=-2(x+3) \Rightarrow e_2=-2\in\mathbf{Z} \Rightarrow A_7$ este adevărată

A_8: $x\otimes(y\oplus z)=(x\otimes y)\oplus(x\otimes z)$, $(\forall)x,y,z\in\mathbf{Z}$

$x\otimes(y\oplus z)=x(y+z+3)+3x+3(y+z+3)+6=xy+xz+6x+3y+3z+15$

$(x\otimes y)\oplus(x\otimes z)=(xy+3x+3y+6)+(xz+3x+3z+6)+3=xy+xz+6x+3y+3z+15$

A_8 este adevărată

Din $A_1,...,A_8 \Rightarrow (\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ inel comutativ

Verificăm existenţa divizorilor lui 0 (0 este primul element neutru $e_1=-3$):

$x \otimes y=-3,\ x,y \neq \mathbf{-3}$

$xy+3x+3y+6=-3 \Rightarrow xy+3x+3y+6=0 \Rightarrow x(y+3)+3(y+3)=0$

$(y+3)(x+3)=0$ adevărată numai în cazul în care $x=-3$ sau $y=-3$.

Inelul nu are divizori ai lui 0.

Elementele inversabile:

$(\exists)x'' \in \mathbf{Z}$ a.î. $x \otimes x''=e_2$

$xx''+3x+3x''+6=-2 \Rightarrow x''(x+3)=-3x-8$

$x''=\frac{-3x-8}{x+3}=-3+\frac{1}{x+3}$ dar $x'' \in \mathbf{Z}$, atunci $(x+3)$ este divizor a lui 1 $\Rightarrow$

$x+3=-1 \Rightarrow x=-4$; $x+3=1 \Rightarrow x=-2$; $x+3=-3 \Rightarrow x=-6$; $x+3=3 \Rightarrow x=0$

Elementele inversabile $\{-6,-4,-2,0\}$

3. Utilizând proprietatea progresiilor aritmetice: $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=...$

avem: $a_6+a_{15}=a_9+a_{12}$ şi ştiind că $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$, obţinem: $a_6+a_{15}=a_9+a_{12}=10$. Se obţine: $S_{20}=10(a_6+a_{15})=100$.

II. **1.** a) xe^x este continuă şi derivabilă pe $(-\infty,1]$
$ax+b$ este continuă şi derivabilă pe $(1,+\infty)$,

atunci f trebuie să fie continuă şi derivabilă în $x=1$.

f continuă în 1 dacă $l_s=l_d=f(1)$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(xe^x)=e\\ &\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(ax+b)=a+b\end{aligned}\right\}\Rightarrow a+b=e \quad (1)$$

f este derivabilă în 1 dacă $f_s'(1)=f_d'(1)$

$$\left.\begin{aligned}&f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{xe^x-e}{x-1}\overset{L'H}{=}\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{e^x+xe^x}{1}=2e\\ &f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{ax+b-a-b}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{a(x-1)}{x-1}=a\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=2e$$

Din (1) rezultă b=-e

b) Avem $f(x)=\begin{cases} xe^x, & daca \quad x\le 1 \\ 2ex-e, & daca \quad x>1 \end{cases}$

$F_1(x)=\int xe^x dx=xe^x-e^x+C_1$

$F_2(x)=\int(2ex-e)dx=ex^2-ex+C_2$. Cum F este derivabilă pe **R** ⇒ F este continuă pe **R**

$F_1(1)=F_2(1) \Rightarrow C_1=C_2=C$

Atunci $F(x)=\begin{cases} e^x(x-1)+C, & daca \ x\le 1 \\ e(x^2-x)+C, & daca \ x>1 \end{cases}$

c) Notăm $f(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)$, f:[0,+∞)→**R**

$$f'(x)=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{-x}{(1+x)^2}\le 0 \Rightarrow \text{f descrescătoare} \Rightarrow \frac{x}{1+x}\le \ln(1+x) \qquad (1)$$

Notăm g(x)=ln(1+x)-x,   g:[0,+∞)→**R**

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}\le 0 \Rightarrow \text{g descrescătoare} \Rightarrow \ln(1+x)\le x \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) $\dfrac{x}{1+x}\le \ln(1+x)\le x$

III.   AB∩BC={B}

B: $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+4=0 \\ \underline{4x+2y+2=0} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{6}{5} \\ y=\dfrac{7}{5} \end{cases}$ $B\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

$5x \quad / \quad +6=0$

AB∩AC={A}

A: $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2=0 \\ x=-2-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ $A\left(-\dfrac{8}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

BC∩AC={C}

C: $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \qquad C(1,-3)$

$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|$

$$\Delta=\begin{vmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{121}{15} \Rightarrow A_{\Delta ABC}=\frac{121}{30}$$