***Soluţie-matematică-fizică***

Varianta 5.

**Rezolvare:**

I. **1.** Pentru ca expresia să aibă sens trebuie ca numitorul să nu aibă rădăcini reale. Pentru a fi strict pozitivă trebuie ca numărătorul să fie strict pozitiv şi numitorul strict pozitiv. Obţinem condiţiile:

$1^0$: $x^2+(m+1)x+m+2>0 \Rightarrow \Delta<0$ deoarece $a=1>0$

$2^0$: $x^2+x+m>0 \Rightarrow \Delta<0$ deoarece $a=1>0$

Din $2^0$ avem: $1-4m<0 \Rightarrow m>\frac{1}{4} \Rightarrow m\in(\frac{1}{4},+\infty)=S_1$

Din $1^0$ avem: $(m+1)^2-4(m+2)<0 \Rightarrow m^2-2m-7<0$, care are rădăcinile: $m_{1,2}=1\pm2\sqrt{2}$

| m | $-\infty$ | | $1-2\sqrt{2}$ | | $1+2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^2-2m-7$ | + | + | 0 | – | 0 | + | + |

$m\in\left(1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right)=S_2$

Soluţia $S=S_1\cap S_2=\left(\frac{1}{4},1+2\sqrt{2}\right)$.

**2.** Condiţii: $x>0 \Rightarrow x\in(0,+\infty)$

Avem: $2\lg^2(x^3)=2\lg^2x^3.\lg^2x^3=18\lg^2x$. Notăm: $\lg x=y$ şi obţinem ecuaţia:

$18y^2-3y-1=0$ cu soluţiile $y_1=-1/6$ şi $y_2=1/3$

Din : $\lg x=-\frac{1}{6}\Rightarrow x=10^{-\frac{1}{6}}$ şi $\lg x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=10^{\frac{1}{3}}$ ambele fiind soluţii.

**3.** Trebuie să arătăm că $(\forall)x,y\in G \Rightarrow x*y\in G$

$$\left.\begin{array}{l} x\in G\Rightarrow x>-3\Rightarrow x+3>0 \\ y\in G\Rightarrow y>-3\Rightarrow y+3>0 \end{array}\right|.$$

$$\overline{xy+3x+3y+9>0}$$

3x+3y>–(9+xy) ⇒ $\frac{3(x+y)}{9+xy}>-1 \Big| \cdot 3 \Rightarrow \frac{9(x+y)}{9+xy}>-3$ (1)

x∈G⇒x<3 ⇒ $x-3<0$

y∈G⇒y<3 ⇒ $y-3<0$

$xy-3x-3y+9>0$

–3(x+y)>–(9+xy) ⇒ $\frac{-3(x+y)}{9+xy}>-1 \Big| \cdot(-3) \Rightarrow \frac{9(x+y)}{9+xy}<3$ (2)

Din (1) şi (2) ⇒ x*y∈G.

Verificăm axiomele grupului:

$G_1$: x*(y*z)=(x*y)*z, (∀)x,y,z∈G

$$x*(y*z)=x*\frac{9(y+z)}{9+yz}=\frac{9\left[x+\frac{9(y+z)}{9+yz}\right]}{9+x\cdot\frac{9(y+z)}{9+yz}}=\frac{81(x+y+z)+9xyz}{81+9(xy+xz+yz)} \quad (1)$$

$$(x*y)*z=\frac{9(x+y)}{9+xy}*z=\frac{9\left[\frac{9(x+y)}{9+xy}+z\right]}{9+\frac{9(x+y)}{9+xy}\cdot z}=\frac{81(x+y+z)+9xyz}{81+9(xy+xz+yz)} \quad (2)$$

Din (1) şi (2) ⇒ $G_1$ este adevărată

$G_2$: x*y=y*x (∀)x,y∈G evidentă

$G_3$: (∃)e∈G a.î. (∀)x∈G ⇒ x*e=x

$$\frac{9(x+e)}{9+xe}=x \Rightarrow \frac{9x+9e-9x-x^2e}{9+xe}=0 \Rightarrow \frac{e(9-x^2)}{9+xe}=0 \Rightarrow e=0\in G \Rightarrow G_3 \text{ este}$$
adevărată

$G_4$: (∀)∈G, (∃)x'∈G a.î. x*x'=e

$$\frac{9(x+x')}{9+xx'}=0 \Rightarrow x+x'=0 \Rightarrow x'=-x\in G \Rightarrow G_4 \text{ este adevărată}$$

Din $G_1$-$G_4$ ⇒ (G,*) grup abelian

I. **1.** a) $f(x)=\begin{cases} -(x-1)e^{x+1}, & daca\ x\in[-2,-1) \\ -(x-1)e^{-(x+1)}, & daca\ x\in[-1,1) \\ (x-1)e^{-(x+1)}, & daca\ x\in[1,+\infty) \end{cases}$

Derivabilitatea în x=-1:

$$f_s^{'}(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{-(x-1)e^{x+1}-2}{x+1}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{-e^{x+1}-(x-1)e^{x+1}}{1}=1$$

$$f_d^{'}(-1)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{-(x-1)e^{-(x+1)}-2}{x+1}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{-e^{-(x+1)}+(x-1)e^{-(x+1)}}{1}=1$$

$f'_s(-1)=f'_d(-1) \Rightarrow$ f este derivabilă în x=-1

Derivabilitatea în x=1

$$f_s^{'}(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-(x-1)e^{-(x+1)}-0}{x-1}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-e^{-(x+1)}+(x-1)e^{-(x+1)}}{1}=-e^{2}$$

$$f_d^{'}(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)e^{-(x+1)}-0}{x-1}\overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{e^{-(x+1)}-(x-1)e^{-(x+1)}}{1}=e^{-2}$$

$f_s'(1)\neq f_d'(1) \Rightarrow$ f nu este derivabilă în x=1

b) Calculăm derivata funcţiei:

pt. $x\in[-2,-1)$ $f'(x)=-e^{x+1}-(x-1)e^{x+1}=xe^{x+1}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ nu este extrem

pt. $x\in[-1,1)$ $f'(x)=-e^{-(x+1)}+(x-1)e^{-(x+1)}=(x-2)e^{-(x+1)}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=2$ nu este extrem pt. x∈[1,2] $f'(x)=e^{-(x+1)}-(x-1)e^{-(x+1)}=(2-x)e^{-(x+1)}$

**2.** $V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin^2 x dx$

calculăm o primitivă a funcţiei $\arcsin^2$x:

$$\int \arcsin^2 x dx=\int \arcsin^2 x\cdot x' dx=x\arcsin^2 x+2\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x dx=$$

$$=x\arcsin^2 x+2\int \arcsin x\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' dx=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-$$

$$-2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}dx=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

$$V=\pi\left(x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}-2x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\pi\left(\frac{1}{2}\arcsin^2\frac{1}{2}+2\sqrt{1-\frac{1}{4}}\arcsin\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1\right)=\pi\left(\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1\right).$$

III. Coordonatele mijlocului unui segment sunt: $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$

Q -mijlocul segmentului AC ⇒ $3=\frac{-3+x}{2}$ ⇒ x=9 şi $-\frac{1}{2}=\frac{-1+y}{2}$ ⇒ y=0.

Atunci C(9,0)

Q -mijlocul segmentului BD ⇒ $3=\frac{2+x}{2}$ ⇒ x=4 şi $-\frac{1}{2}=\frac{\frac{11}{4}+y}{2}$ ⇒ y=$-\frac{9}{4}$

Atunci D(4, $-\frac{9}{4}$)

Ecuaţia dreptei CD: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$$\frac{y-0}{-\frac{9}{4}-0}=\frac{x-9}{4-9}\Rightarrow\frac{4y}{-9}=\frac{x-9}{-5}\Rightarrow 20y=9x-81$$

CD: 9*x*-20*y*-81=0.