Subiect profil matematică-fizică

Varianta 3.

I. 1. (1,5p) Fie x_1,x_2,x_3 rădăcinile polinomului $f\in\mathbf{R}[X]=X^3+(m+1)X^2+2X+m$. Să se calculeze în funcţie de m: $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ şi $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ şi să se rezolve inecuaţia:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3\leq 5-2x_1x_2x_3.$$

2. (2p) Definim pe **Z** legile de compoziţie $x\oplus y=x+y+3$ şi $x\otimes y=xy+3x+3y+6$. Să se demonsterze că $(\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ este un inel comutativ. Verificaţi dacă inelul are divizori ai lui 0. Determinaţi elementele inversabile ale acestui inel.

3. (1p) Să se găsească suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă:

$$a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=20$$

II. 1. Se dă funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases} xe^x, & daca\ \ x\leq 1 \\ ax+b, & daca\ \ x>1 \end{cases}$$

a) (1p) Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia să fie continuă şi derivabilă pe **R.**

b) (1p) Pentru a=2e şi b=-e să se determine o primitivă pe **R** a lui f.

2. (1p) Să se demonstreze, că pentru orice $x\neq 0$, au loc inegalităţile:

$$\frac{x}{1+x}\leq \ln(1+x)\leq x$$

III. (1p) Să se determine aria triunghiului ABC determinat de dreptele de ecuaţii:

(AB): $x-2y+4=0$

(BC): $2x+y+1=0$

(AC): $x+y+2=0$