Subiect profil matematică-fizică

Varianta 4.

I. 1. (1,75p) Să se determine n astfel încât în dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$ ($n\in\mathbf{N}^*$) suma coeficienţilor binomiali ai ultimilor trei termeni să fie egali cu 22. Pentru n=6 să se determine x ştiind că suma termenilor 3 şi 5 este egală cu 135.

2. (1,5p) Se consideră matricea X cu proprietatea:

$$X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

Precizaţi tipul matricei X şi apoi determinaţi această matrice.

3. (1p) Rezolvaţi în $\mathbf{Z}_8$:

$$\begin{cases}x+\hat{2}y=\hat{1}\\ \hat{3}x+\hat{4}y=\hat{1}\end{cases}$$

II. 1. (1,25p) Să se determine a,b$\in\mathbf{R}$ astfel încât: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x+1}-ax-b\right)=2\sqrt{2}$

2. Pentru $n\in\mathbf{N}$ se consideră integralele:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos(2x)dx,\qquad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n dx$$

a) (1p) Să se calculeze I_0 şi I_1
b) (0,5p) Fără a calcula integrala I_n, să se precizeze monotonia şirului $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$
c) (1p) Comparaţi integrala I_n cu integrala J_n. Să se precizeze dacă şirul $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent şi, în caz afirmativ, să se determine limita sa.

III. (1p) Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC, unde vârfurile triunghiului au coordonatele A(2,5), B(5,1) şi C(-2,2).