

Subiect profil matematică-fizică

Varianta 5.

I. 1. (1,5p) Se dă expresia:

$$E(x) = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$$

Să se determine parametrul real m astfel încât $E(x)$ să aibă sens și să fie strict pozitivă pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2. (1p) Să se rezolve ecuația: $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$.

3. (1,5p) Fie $G = (-3, 3)$. Pentru x și y definim:

$$x * y = \frac{9(x+y)}{9+xy}$$

Să se demonstreze că legea $*$ este lege de compoziție pe G și că $(G, *)$ este grup abelian.

II. 1. Se consideră funcția $f: [-2, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = |x-1|e^{-|x+1|}$

a) (1,5p) Să se explicitizeze funcția f și să se studieze derivabilitatea ei.

b) (1p) Să se determine extremele locale ale funcției.

2. Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat de funcția:

$$f: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \arcsin x$$

III. (1p) Paralelogramul ABCD are vârfurile consecutive A și B de coordonate $A(-3, -1)$ și $B(2, \frac{11}{4})$. Se știe că punctul $Q(3, \frac{1}{2})$ este intersecția diagonalelor paralelogramului. Să se afle coordonatele vârfurilor C și D și ecuația laturii BC.