Varianta 4

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1}\cdot$

a) Să se determine a și b astfel încât funcția să admită un extrem egal cu 1 în punctul de abscisă 0.

b) Pentru $a = 1$ și $b = -1$, reprezentați graficul funcției $g = f'$.

2. **a)** Să se demonstreze că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\dfrac{1}{e} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leq \dfrac{\pi}{4}\cdot$

SUBIECTUL II

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$.

2. Se consideră matricea $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$.

a) Pentru ce valori complexe ale lui m matricea A este inversabilă?

b) Pentru $m = 2$ să se determine inversa matricei A.

c) Să se demonstreze că, dacă $m = 0$, atunci $A^k \neq O_3$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x \star y = ax + ay + bxy + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b și c pentru care $e = -4$ este element neutru și orice $x \neq -5$ este simetrizabil.

SUBIECTUL III

Să se determine simetricul punctului $A(1, 2)$ față de dreapta de ecuație $2x = y + 4$.