Varianta 5

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră matricele $A,\ B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Să se demonstreze că $A^2 = 3A$ și $AB = BA$.

2. Să se determine A^n și B^n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dacă $C = 3A - 3B$, să se calculeze C^3.

SUBIECTUL II

Se consideră familia de funcții $f_m : \mathbb{R}\backslash\{m\} \to \mathbb{R},\ f_m(x) = \dfrac{(2m-1)x + m}{x - m}$, unde m este un parametru real nenul. Se notează cu H_m graficul funcției f_m.

1. Să se reprezinte graficul funcției f_1.

2. Să se demonstreze că, pentru orice m, graficele H_m trec printr-un punct fix.

3. Să se arate că, pentru orice m, există un punct situat pe H_m a cărui tangentă este paralelă cu tangenta la grafic în $A(0, -1)$.

SUBIECTUL III

Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X],\ f = X^3 + X^2 + aX + b$. Să se determine a și b, știind că restul împărțirii polinomului $f(X-3)$ la $X-1$ este -4 și rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ satisfac relația $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 5$ și $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{4}{x^2}\cdot$

1. Să se determine punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții și să se rezolve inecuația $g(x) \leq f(x)$.

2. Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x = 1,\ x = 2$.