Varianta 6

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve ecuația $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$.

2. Se consideră mulțimea $G = (2, \infty)$ pe care se definește legea $x \star y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x,\ y \in G$. Să se demonstreze că "$\star$" este lege de compoziție pe G și că $(G, \star)$ este grup abelian. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to (2, +\infty)$, $f(x) = e^x + 2$, este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, \star)$.

3. Să se discute după parametrul real m și să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}.$$

SUBIECTUL II

1. Se consideră funcția definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + (m-2)x - m + 2}$, unde m este un parametru real.

- **a)** Se cere să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care domeniul de definiție al funcției coincide cu domeniul de derivabilitate.
- **b)** Pentru $m = 3$ să se reprezinte grafic funcția obținută.

2. Se consideră șirul $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Fără a calcula integrala, să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit.
- **b)** Să se arate, folosind integrarea prin părți, că $a_n = \dfrac{2n-1}{2n} a_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- **c)** Să se calculeze I_3.

SUBIECTUL III

Să se determine ecuația cercului ce trece prin punctele $A(-1, 5)$, $B(-2, -2)$ și $C(5, 5)$, precizând coordonatele centrului și lungimea razei acestui cerc.