Varianta 7

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x \quad + mz = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$ în necunoscutele x, y, z, unde m este un parametru real. Să se determine m astfel încât sistemul să admită numai soluția banală.

2. Se consideră matricele A, B, $C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, unde $m \neq \frac{5}{4}$. Să se demonstreze că, pentru x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, avem $x_1A + x_2B + x_3C = O_2$ dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

SUBIECTUL II

În mulțimea numerelor complexe se consideră următoarele ecuații:

$$z^3 - 3iz^2 - 3z + 8 + i = 0 \tag{1}$$

și

$$z^3 + 8 = 0 \tag{2}$$

1. Arătați că z_0 este soluția ecuației (1) dacă și numai dacă $z_0 - i$ este soluția ecuației (2).

2. Să se rezolve ecuațiile date.

SUBIECTUL III

Se consideră sistemul cartezian de coordonate xOy și punctele $A(3, 0)$, $B(0, 2)$, $M(3, -3)$, respectiv $N(-2, 2)$. Să se demonstreze că dreptele AN, BM și perpendiculara din O pe AB sunt concurente.

SUBIECTUL IV

Să se calculeze integrala $\int_0^1 \ln(1 + x^2)\, dx$ și limita șirului

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k^2 + n^2) - 2(n-1)\ln n\right),\ n \in \mathbb{N}^*.$$

SUBIECTUL V

Se consideră funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1. Să se determine funcțiile f' și f''.

2. Să se demonstreze că, pentru orice $x \in [0, 1]$, $f''(x) > 0$ și $f'(x) \leq \frac{2}{9}e$.

3. Să se arate că ecuația $f(x) = x$ are soluție unică pe intervalul $[0, 1]$.