Varianta 8

Profilul matematică - fizică, informatică, metrologie

SUBIECTUL I

Se consideră sistemul (S) cu a, b, c parametri reali:

$$(S) \qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ (b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases} .$$

1. Să se determine condiția ca (S) să admită numai soluția banală.

2. Fie polinoamele f, g, $h \in \mathbb{R}[X]$, $f=(X-b)(X-c)$, $g=(X-c)(X-a)$ și $h=(X-a)(X-b)$, unde a, b, c sunt constante reale distincte între ele. Arătați că, pentru x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, polinomul $x_1 f + x_2 g + x_3 h$ este egal cu polinomul nul dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

SUBIECTUL II

Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația

$$z^3 - (2\sqrt{3}+3i)z^2 + (1+4\sqrt{3}i)z - 3i - 6\sqrt{3} = 0,$$

știind că admite soluții de forma bi, unde $b \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Să se scrie ecuația cercului tangent axei Ox, având centrul pe prima bisectoare și care trece prin punctul $A(-2,1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln|x+1| + \dfrac{x}{x+1}$.

1. Să se calculeze limitele funcției în capetele domeniului.

2. Să se stabilească monotonia funcției.

3. Să se demonstreze că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică pe $(-\infty,-1)$.

SUBIECTUL V

Se consideră funcția $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât dreapta de ecuație $y = mx$ să împartă subgraficul funcției în două mulțimi de arii egale.