Sesiunea august 1999

5.Profilurile fizică-chimie şi chimie-biologie - proba f

Varianta nr.1

I. (37 puncte)

1) **(12p)** Să se rezolve ecuaţia: $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) = \frac{9}{4} + \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2.$

2) **(12p)** Se consideră ecuaţia: $x = \left(2 - \frac{x+1}{x-7}\right)^2, x \neq 7.$

Să se rezolve ecuaţia în mulţimea numerelor complexe, ştiind că admite soluţia z=3+4i.

3) **(13p)** Se consideră matricele A,B,C∈M_2(**R**), $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, m \neq \frac{5}{4}$

Să se demonstreze: pentru x_1,x_2,x_3∈(**R**), matricea $x_1A+x_2B+x_3C=O_2$ dacă şi numai dacă $x_1=x_2=x_3=0$.

II. (38 puncte)

1) **(12p)** Se consideră şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu raţia q, 0<q<1, şi $b_1<0$, şi sumele $S_n=b_1+b_2+...+b_n$ şi $T_n= b_1^3 + b_2^3 + ... + b_n^3$.

a) Sã se calculeze S_nşi T_n în funcţie de b_1 şi q.

b) ªtiind cã $\lim_{n\to\infty} S_n = 3$ şi $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{108}{3}$ sã se afle primul termen b_1 şi raţia q.

2) **(18p)** Se considerã funţia f:[0,1]→**R**.

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\frac{1}{x} + (1-x)\ln\frac{1}{1-x}, & x \neq 0 \text{ si } x \neq 1 \\ 0 & x = 0 \text{ sau } x = 1 \end{cases}.$$

a) Sã se arate cã funcţia este continuã.

b) Sã se stabileascã domeniul de derivabilitate al funcţiei şi sã se calculeze derivata funcţiei f.

c) Sã se stabileascã intervalele de monotonie şi punctele de extrem ale funcţiei f.

3) **(8p)** Se considerã funcţiile f:**R**→**R**, $f(x)=-x^2+5$ şi g:**R**-{0}→**R**, $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

a) Sã se determine punctele de intersecţie ale graficelor celor două funcţii şi să se rezolve inecuaţia g(x)≤f(x).

b) Sã se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficele celor două funcţii şi dreptele x=1, x=2.

III. (15 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(0,4), B(3,5) şi dreapta de ecuaţie d: 3x+2y-10=0.

a) Să se reprezinte dreapta şi punctele.

b) Să se scrie ecuaţia cercului care trece prin A, B şi are centrul pe d.

Precizaţi coordonatele centrului şi raza.