

Sesiunea august 1999

5.Profilurile fizică-chimie și chimie-biologie - proba f

Varianta nr.2

I. (40 puncte)

- 1) (8p) Se consideră expresia $E(x,m) = \frac{1}{x+m} + \frac{1}{x-m+4} + \frac{2}{x-4}$, m parametru real. Să se arate că pentru orice $m \in \mathbf{R}$ ecuația $E(x,m)=0$ are rădăcini reale.
- 2) (16p) Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}} + x^{\lg x}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$.
- a) Să se determine n dacă diferența dintre coeficientul binomial al celui de al treilea termen și coeficientul binomial al celui de al doilea termen al dezvoltării este 27.
- b) Pentru $n=9$, verificați dacă există valori ale lui x , astfel încât al doilea termen al dezvoltării să fie 900.
- 3) (16p) Se consideră mulțimea $G=(-3,3)$ pe care definim operația: $x * y = \frac{9(x+y)}{9+xy}$, $\forall x, y \in G$.
- a) Să se arate că operația „*” este lege de compoziție pe G .
- b) Să se demonstreze că $(G, *)$ formează o structură de grup comutativ.

II. (35 puncte)

- 1) (12p) Se consideră funcțiile $f_p: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_p(x) = \frac{p}{x} - \frac{\ln x}{x}$, $p \in \mathbf{N}$. Să se demonstreze că, pentru orice $p \in \mathbf{N}$, funcția f_p are un singur punct de minim.
- Se notează cu x_p punctul de minim și cu y_p valoarea minimă a funcției f_p .
- Să se arate că șirul $s_p = y_0 + y_1 + \dots + y_p$, $p \in \mathbf{N}$, este convergent și să se calculeze limita sa.

- 2) (23p) Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{e^x}, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{\ln^2 x}{x}, & x \in [1, \infty) \end{cases}$.

- a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe \mathbf{R} și să se afle o primitivă a sa.
- b) Să se calculeze aria suprafeței plane limitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$, $x=0$.

III. (15puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(0,2)$.

- a) Să se determine coordonatele punctului D , mijlocul segmentului $[AB]$. Scrieți ecuația mediatoarei d a segmentului $[AB]$.
- b) Să se determine coordonatele următoarelor puncte:
- $\{E\} = d \cap OB$, $\{F\} = d \cap OA$.
 - M mijlocul segmentului $[AE]$ și N mijlocul segmentului $[BF]$.

Să se verifice dacă MD și ND sunt perpendiculare. Dar MO și ON ?