Sesiunea august 1999

1.Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.1

I. (41 puncte)

1) **(14p)** Se consideră expresia $P(x)=x^2-x\log_a t+3\log_a t-8$, unde $a,t\in\mathbf{R}$, $0<a<1$ şi $t>0$.

a) Să se determine t, astfel încât $P(x)>0$ pentru orice x număr real.

b) Să se determine t, astfel încât ecuaţia $P(x)=0$ să admită o rădăcină dublă în intervalul $(0,3)$.

2) **(12p)** Să se rezolve ecuaţia $x^2\cdot 2^{x+1}+2^{|x-3|+2}=x^2\cdot 2^{|x-3|+2}+2^{x-1}$.

3) **(15p)** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}6&9&5&6\\8&12&7&m\\2&3&1&2\\4&6&3&4\end{pmatrix}$, m parametru real.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Pentru m=8 să se rezolve ecuaţia ecuaţia matriceală $A\cdot X=\begin{pmatrix}7\\9\\3\\5\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$.

II. (35 puncte)

1) **(11p)** Să se arate că pentru orice număr real x, $x\geq 0$, este adevărată relaţia $1-\frac{x}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leq 1$.

2) **(16p)** Se consideră funcţia $f:D\to\mathbf{R}$, (D este domeniul maxim de definiţie),

$f(x)=\operatorname{arcg}\frac{a+x}{1-ax}-\frac{1}{a}\ln\sqrt{1+x^2}$, $a\in R$, $a\neq 0$.

a) Să se determine a astfel încât $\lim_{x\to\infty}\left(-axf'(x)\right)^x=e^2$.

b) Pentru a=-2 să se determine domeniul de derivabilitate al funcţiei obţinute. Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei obţinute.

3) **(8p)** Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

a) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\geq 1$.

b) Calculaţi aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f, dreptele y=1, $x=\frac{1}{e^2}$ şi $x=\frac{1}{e}$.

III. (14 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(3,1), B(-1,3) şi dreapta d de ecuaţie d: 3x-y-2=0.
Să se determine ecuaţia cercului care are centrul pe dreapta d şi trece prin punctele A şi B.