Sesiunea august 1999

1.Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.3

I. (40 puncte)

1) **(12p)** Să se rezolve inecuaţia $\log_{2x-x^2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 > 0$.

2) **(8p)** Precizaţi dacă există un număr complex y care să îndeplinească simultan condiţiile: $|z-1-2i|=3$ şi Re$z \geq 5$.

3) **(20p) a)** Calculaţi determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, scriind rezultatul ca produs de factori.

b) Să se demonstreze că dacă polinomul $f \in \mathbf{C}[X]$, $f=aX^2+bX+c$ (a,b,c parametri), are trei rădăcini distincte, atunci a=b=c=0.

a) Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuaţia: $(m^2-3m+2)x^2-(m^2-5m+4)x+m-m^2=0$ are cel puţin trei rădăcini distincte.

II. (35 puncte)

1) **(12p)** Se consideră şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică, $b_1>0$, cu raţiaq, $0<q<1$, şi sumele $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ şi $T_n = b_1^3 + b_2^3 + \ldots + b_n^3$.

a) Să se calculeze S_n şi T_n în funcţie de b_1 şi q.

b) Ştiind că $\lim_{n\to\infty} S_n = 3$ şi $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{108}{13}$, să se afle primul termen b_1 şi raţia q.

2) **(13p)** Se consideră expresia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + (m-2)x - m + 2}$, m parametru real.

a) Se cere să se determine mulţimea valorilor lui m pentru care domeniul maxim de definiţie al funcţiei coincide cu domeniul de derivabilitate.

b) Pentru m=-2 să se stabilească monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei obţinute.

3) **(10p)** Precizaţi dacă există numerele reale a şi b astfel încât funcţia $F(x) = \left(\frac{a}{x} + b\right) \cdot e^{-\frac{2}{x}}$ să fie primitiva funcţiei $f(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{2}{x}}$ pe $(0,\infty)$. Justificaţi răspunsul.

III. (15 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră dreapta d şi elipsa E de ecuaţii: d: x+5=0, respectiv E: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Reprezentaţi grafic elipsa şi dreapte.

b) Fie B şi C vârfurile elipsei situate pe semiaxa pozitivă Oy, respectiv semiaxa Ox negativă. Determinaţi coordonatele unui punct situat pe dreapta d, aflat la egală distanţă de punctele B şi C.