Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

3. Profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

Varianta nr.3

I. 1) Din $\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}\le a$ pentru orice $x\in\mathbf{R} \Rightarrow (2-a)x^2+(2-a)x+3-a\le 0$ deci a e

soluţia sistemului: $\begin{cases}2-a<0\\(2-a)^2-4(2-a)(3-a)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>2\\(2-a)(3a-10)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a>2\\3a-10\ge 0\end{cases}$, deci $a\ge\frac{10}{3}$.

2) Ecuaţia are coeficienţi reali şi rădăcina $z_1=1+2i \Rightarrow z_2=1-2i$ deci polinomul

$P(x)=x^4-7x^3+21x^2+ax+b$ se divide cu $(x-z_1)(x-z_2)=x^2-2x+5$ şi atunci restul $r(x)=(27+a)x+b-30$.

Acum $P(x)=(x^2-2x+5)(x^2-2x+5)$ cu rădăcinile $z_1=1+2i$; $z_2=1-2i$; $z_3=2$; $z_4=3$.

3) a) $A^2=\begin{pmatrix}9&8\\-8&-7\end{pmatrix}$ şi $2A-I_2=\begin{pmatrix}10&8\\-8&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8\\-8&-7\end{pmatrix}$, de unde

egalitatea $A^2=2A-I_2$.

b) Fie $B_1=a_1A+b_1I_2$ şi $B_2=a_2A+b_2I_2$ matrice oarecare din G.

Atunci $B_1\cdot B_2=(a_1A+b_1I_2)(a_2A+b_2)=a_1a_2A^2+(a_1b_2+b_1a_2)A+b_1b_2I_2$ şi folosind relaţia de la **a)** se obţine $B_1\cdot B_2=(2a_1a_2+a_1b_2+b_1b_2)A+(b_1b_2-a_1a_2)I_2\in G$ deci G e parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

Înmulţirea matricelor e asociativă în $M_2(\mathbf{R})$ cu elemetul neutru I_2, deci şi înmulţirea matricelor din G e asociativă cu acelaşi element neutru $I_2=0\cdot+1\cdot I_2\in G$. Se obţine că $(G,\cdot)$ e monoid.

Dar $B_2\cdot B_1=(a_2A+b_2I_2)\cdot(a_1A+b_1I_2)=(2a_2a_1+a_2b_1+b_2a_1)A+(b_2b_1-a_2a_1)I_2=B_1\cdot B_2$ se obţine că legea e comutativă pe G.

II. 1) a) Se consideră progresia geometrică $b_1,b_2,\dots,b_n$ cu $b_1>0$ şi $0<q<1$.

$S_n=b_1+b_2+\dots+b_n=b_1(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})=b_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

$T_n=b_1^3+b_2^3+\dots+b_n^3=b_1^3\left[1+q^3+(q^3)^2+\dots+(q^3)^{n-1}\right]=b_1^3\cdot\frac{1-(q^3)^n}{1-q^3}$

Din $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3\Rightarrow b_1\cdot\frac{1}{1-q}=3$, iar din $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\frac{108}{13}\Rightarrow b_1^3\cdot\frac{1}{1-q^3}=\frac{108}{13}$ şi atunci $b_1=3(1-q)$ iar $\frac{3^3(1-q)^3}{(1-q)(1+q+q^2)}=\frac{108}{13}\Rightarrow$

$13(1-2q+q^2)=4(1+q+q^2)$ de unde $q_1=\frac{1}{3}$ şi $q_2=3>1$, deci q=$\frac{1}{3}$ şi b_1=2.

2) a) $f'(x)=2\ln 25-5^{x-1}\cdot\ln 5+5^{2-x}\cdot\ln 5=\ln 5\cdot(5^{2-x}-5^{x-1}+4)$ ⇒ f este derivabilă pe tot

domeniul de definiţie **R**.

$f'(x)=0 \Rightarrow 5^{2-x}-5^{x-1}+4=0$ care cu substituţia $5^{1-x}=t$ se transformă în $5t-\frac{1}{t}+4=0 \Rightarrow 5t^2+4t-1=0$ cu soluţia pozitivă $t=\frac{1}{5}$ de unde $5^{1-x}=5^{-1}$, deci x=2.

Pentru x>2 ⇒ f'(x)<0 adică f strict descrescătoare, iar pentru x<2 ⇒ f'(x)>0, adică f strict crescătoare şi x=2 fiind punct de maxim pentru f.

b) f'(x) e derivabilă pe **R** şi $f''(x)=(-5^{2-x}-5^{x-1})\cdot\ln^2 5=-(5^{2-x}+5^{x-1})\cdot(\ln 5)^2<0$ pentru orice x∈**R**, deci f nu are puncte de inflexiune.

3) a) $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x}(\ln x+1)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x+1\leq 0$ pentru că

$-\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{e}$. Deci soluţia inecuaţiei este $x\in[0,\frac{1}{e}]$.

b) Aria cerută este $A=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}|f(x)-1|dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=$

$$=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}(\ln x)'(\ln x+1)dx=\left(-\ln^2 x-\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}=$$

$$=-\left[\ln x\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)\right]\Bigg|_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{2}.$$