Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

3. Profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

Varianta nr.4

I. 1) a) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, deci coeficienţii ceruţi sunt $C_n^0, C_n^1 \text{ şi } C_n^2$

Obţinem ecuaţia $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46 \Rightarrow 1 + n + \dfrac{n(n+1)}{2} = 46 \Rightarrow n = 9 \in N$.

b) Pentru n=9, $T_{k+1} = C_9^k \left(x^2\right)^{9-k} \left(\dfrac{1}{x}\right)^k = C_9^k \cdot x^{2n-2k-k}$, care nu conţine pe x $\Leftrightarrow$k=6.

2) a) Ecuaţia are soluţiile x_1=t; x_2=-3t.

b) z=0 nu e soluţie. Cu substituţiile x=z^2+2z+1 şi t=z se regăseşte ecuaţia de la

punctul **a)**. Deci z^2+2z+1=z sau z^2+2z+1=-3z, cu soluţiile $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, respectiv $z_{3,4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

3) a) Se verifică uşor că x=-1, y=1, z=0, t=1, respectiv x=1, y=0, z=-2, t=1 sunt

soluţii.

b) De la **a)** sistemul e compatibil. Se verifică că toţi minorii de ordin 3 sunt nului deci rang A<3 şi că $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang A=2. Punând x=$\alpha \in$**R** şi y=$\beta \in$**R**, se obţine sistemul echivalent: $\begin{cases} z + 2t = 3 - 3\alpha - 4\beta \\ 2z + 5t = 7 - 6\alpha - 8\beta \end{cases}$ cu z=1-3α-4β şi t=1. Deci soluţiile sistemului sunt: x=α, y=β, z=1-3α-4β şi t=1.

II. 1) a) Domeniul de definiţie D=**R-{**0}. Intersecţia cu axele: A$\left(-\sqrt[3]{4}, 0\right)$

f(0-0)=$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0+0) = +\infty \Rightarrow$ x=0 asimptotă verticală

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ şi } m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1; n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - x\right) = 0$, deci graficul admite asimptotă oblică y=x.

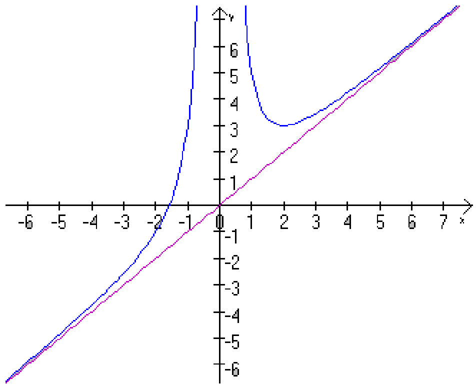
f este derivabilă de două ori pe D şi $f'(x) = \dfrac{x^4 - 8x}{x^4} = \dfrac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x^4}; \quad f''(x) = \dfrac{24}{x^4}$

f'(x)<0 pentru x$\in$(0,2) şi f'(x)>0 pentru x$\in$(-∞,0)U(2,+∞) iar f''(x)>0 pe D

Tabelul de variaţie:

x	-∞		$-\sqrt[3]{4}$		0			2		+∞
f'(x)	+	+	+	+	|		-	0	+	+
f(x)	-∞	↗	0	↗	+∞ |	+∞	↘	3	↗	+∞
f''(x)	+	+	+	+	|		+	+	+	+

Graficul funcţiei:



b) Din grafic se deduce că ecuaţia f(x)=m, m∈**R** are după cum urmează:

Pentru m<3, soluţie unică $x_1<0$

Pentru m=3, două soluţii distincte $x_1<0$, $x_2=2$

Pentru m>3, trei soluţii distincte $x_1<0$, $0<x_2<2$, $x_3>2$.

2) a) f:[-a,a]→**R** (a>0) e continuă ⇒ f e integrabilă, [-a,a] interval simetric

Dacă f e pară, adică f(-x)=f(x) pentru ∀x∈[-a,a] şi cu schimbarea de variabilă t=-x se obţine că $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Dacă f e impară, adică f(-x)=-f(x) cu aceeaşi schimbare $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

b) Funcţia f:[-2,2]→**R**, $f(x)=x^2 \cdot e^{|x|}$ este funcţie pară deci $\int_{-2}^{2} x^2 \cdot e^{|x|}dx = 2\int_{0}^{2} x^2 \cdot e^{x}dx = 2e^x\left(x^2-2x+2\right)\Big|_0^2 = 4\left(e^2-1\right)$,

iar funcţia g:[-2,2]→**R**, $g(x)=x^3 \cdot e^{|x|}$ este funcţie impară, deci $\int_{-2}^{2} g(x)dx = 0$.

III. a) A(4,0); A'(-4,0); B(0,3); B'(0,-3) , AA' axa mare şi BB' axa mică

Pentru M(5,0) avem: $\frac{5^2}{16} + \frac{0}{9} = \frac{25}{16} > 1 \Rightarrow$ M∈exteriorului elipsei.

b) Fie P(u,v)∈E ⇒ $\frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{9} = 1$ (*)

Tangenta în P: $\frac{ux}{16} + \frac{vy}{9} = 1$ care conţine pe M(0,5) de unde $\frac{5u}{16} + \frac{0 \cdot v}{9} = 1 \Rightarrow u = \frac{16}{5}$ şi apoi din (*) ⇒ $v_1 = -\frac{9}{5}$ şi $v_2 = \frac{9}{5}$, deci există două puncte cu proprietatea cerută: $P_1\left(\frac{16}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ şi $P_2\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Tangenta în P_1 e t_1: $\frac{x}{5} - \frac{z}{5} = 1$ cu panta $m_1=1$

Tangenta în P_2 e t_2: $\frac{x}{5} + \frac{z}{5} = 1$ cu panta $m_1=-1$.