Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

3. Profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

Varianta nr.5

I. 1) Ecuaţie echivalentă cu $3\cdot\log_x 4+\frac{2}{1+\log_4 x}+\frac{3}{2+\log_4 x}=0$ şi cu substituţia

$\log_4 x=t$, $x>0$ şi $x\neq 1$ se obţine ecuaţia $3(1+t)(2+t)+2t(2+t)+3t(1+t)=0$, adică

$4t^2+8t+3=0$ cu soluţiile $t_1=-\frac{3}{2}$ şi $t_2=-\frac{1}{2}$ de unde $x_1=4^{-\frac{3}{2}}$, $x_2=4^{-\frac{1}{2}}$,

adică $x_1=\frac{1}{8}$ şi $x_2=\frac{1}{2}$.

2) Cu substituţia $3^x=t>0$ pentru $\forall x\in\mathbf{R}$ se obţine inecuaţia $\alpha^2-9t^2-8t\alpha>0 \Leftrightarrow$

$9t^2-8t\alpha+\alpha^2<0$, de unde $t_1=-\alpha$ şi $t_2=\frac{\alpha}{9}$ sunt rădăcinile ecuaţiei în t: $9t^2+8t\alpha-\alpha^2=0$. Revenind se obţine $3^x\in(-\alpha,\frac{\alpha}{9})\Rightarrow 0<3^x<\frac{\alpha}{9}\Rightarrow x<\frac{\ln\alpha-2\ln 3}{\ln 3}$. Deci soluţia inecuaţiei e $x\in\left(-\infty,\frac{\ln\alpha}{\ln 3}-2\right)$.

3) Sistemul e omogen, deci are ca soluţie soluţia banală x=y=z=t=0

a) Se verifică că x=-8, y=8, z=-3, t=1 nu e soluţie a sistemului, iar x=4, y=8, z=0, t=0 e soluţie a sistemului.

b) $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 7\end{vmatrix}=-6\neq 0\Rightarrow \text{rang } A\geq 2$, unde A este matricea sistemului.

Cum $\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & 7 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$ şi $\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 4 & 7 & 5\\ 2 & 1 & -5\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ rang A=2.

Fie $y=\alpha\in\mathbf{R}$ şi $t=\beta\in\mathbf{R}$ se obţine sistemul echivalent $\begin{cases}2x+5z=\alpha-7\beta\\ 4x+7y=2\alpha-5\beta\end{cases}$ cu soluţiile $x=\frac{\alpha}{2}-11\beta$, $y=\alpha$, $z=3\beta$ şi $t=\beta$ unde $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

II. 1) a) $f'(x)=3m^2x^2+2mx-1$ cu $\Delta=4m^2-4\cdot 3m^2(-1)=16m^2>0\Rightarrow$ ecuaţia $f'(x)=0$ are 2

soluţii distincte şi cum f'(x) îşi schimbă semnul în jurul rădăcinilor ⇒ f are 2 puncte de extrem local pentru $\forall m\in\mathbf{R}$, $x_1=-\frac{1}{m}; x_2=\frac{2}{3m}$.

b) Pentru $m=-\frac{1}{3}; f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x-3$

$f(0)=/3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, graficul lui f nu are asimptote.

f e continuă şi derivabilă pe **R**

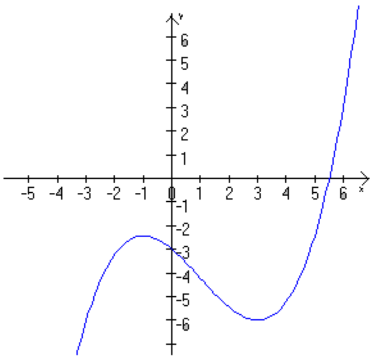
$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$ cu rădăcinile $x_1=3$, respectiv $x_2=-1$

$f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(x-1)\Rightarrow$ x=1 rădăcină

Tabelul de variaţie:

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
f'(x)	+	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+
f''(x)	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+
f(x)	$-\infty$	↗	$-\frac{22}{9}$	↘	-3	↘	$-\frac{38}{9}$	↘	-6	↗	$+\infty$

Graficul funcţiei:



2) a) $I_n=\int_1^e\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'\ln x dx=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right)\Big|_1^e-\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\right)\Big|_1^n=$

$\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{e^n}{n+1}+\frac{1}{n+1}=\frac{e^{n+1}-e^n+1}{n+1}$.

$J_n=\int_1^e\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'(\ln x)^2dx=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^2\right)\Big|_1^e-\int_1^e\frac{2x^n}{n+1}\ln xdx=$

$=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{2}{n+1}\int_1^e x^n\ln xdx\Rightarrow J_n=\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{2}{n+1}I_n$.

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{J_n-I_n}{e^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{n+1}-\left(\frac{2}{n+1}+1\right)I_n}{e^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{n+1}-\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{e^{n+1}-e^n+1}{n+1}}{e^{n+1}}=$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}-\frac{n+3}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{e}+\frac{1}{e^{n+1}}\right)\right]=0$.

III. a) $r=AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, *C*: $(x+1)^2+(z-2)^2=8$

b) Dacă x=-1 $\Rightarrow$ $(y-2)^2=8\Rightarrow y-2=\pm2\sqrt{2}\Rightarrow T_1(-1,2-2\sqrt{2})$; $T_2(-1,2+2\sqrt{2})$.

Ecuaţia tangentei în T_1: $(x+1)(-1+1)+(y-2)(2-2\sqrt{2}-2)=8\Rightarrow y=2-2\sqrt{2}$

Ecuaţia Tangentei în T_2: $(x+1)(-1+1)+(y-2)(2+2\sqrt{2}-2)=8\Rightarrow y=2+2\sqrt{2}$.