Sesiunea iunie-iulie 1999

3.Profilurile economic, fizică-chimie şi chimie-biologie

Varianta nr.3

I. (38 puncte)

1) **(10p)** Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât inecuaţia $\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}\le a$, să fie adevărată pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

2) **(12p)** Se consideră ecuaţia cu coeficienţi reali $x^4-7x^3+21x^2+ax+b=0$, $a,b\in\mathbf{R}$. Dacă $z=1+2i$ este o rădăcină a ecuaţiei, să se determine parametri reali a şi b, şi să se rezolve ecuaţia.

3) **(16p)** Se consideră $M_2(\mathbf{R})$ mulţimea matricelor pătratice de ordin doi peste **R**, matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ şi submulţimea $G=\{B=aA+bI_2/a,b\in\mathbf{R}\}$.

a) Să se arate că $A^2=2A-I_2$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor şi că $(G,\cdot)$ are o structură de monoid.
Legea este comutativă pe G ? Justificaţi răspunsul.

II. (37 puncte)

1) **(12p)** Se consideră şirul $(b_n)_{n\ge 1}$ o progresie geometrică, $b_1<0$, cu raţia q, $0<q<1$ şi sumele $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ şi $T_n=b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3$.

a) Să se calculeze S_n şi T_n în funcţie de b_1 şi q.

b) Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=\frac{108}{13}$, să se afle primul termen b_1 şi raţia q.

2) **(17p)** Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=7+2x\ln 25-5^{x-1}-5^{2-x}$.

a) Să se stabilească domeniul de derivabilitate al funcţiei şi să se calculeze derivata funcţiei f. Precizaţi monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei f.

b) Determinaţi numărul punctelor de inflexiune.

3) **(8p)** Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

a) Să se rezolve inecuaţia $f(x)\ge 1$.

b) Calculaţi aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f. dreptele $y=1$, $x=\frac{1}{e^2}$ şi $x=\frac{1}{e}$.

III. (15puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră cercul *C* de ecuaţie $x^2+(y-4)^2=16$.

a) Precizaţi centrul şi raza cercului *C*; reprezentaţi cercul.

b) Să se verifice, prin calcul, că punctul A(0,-2) nu aparţine cercului.
Să se determine coordonatele punctelor B situate pe cerc, astfel încât tangenta în B la cerc să treacă prin A.
Scrieţi ecuaţiile tangentelor la cerc. Determinaţi pantele tangentelor.