Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

2. Profilurile industrial, agricol şi sportiv-real

Varianta nr.1

I. 1) Din prima condiţie rezultă: x=1, y=-1 şi f(1)=-1⇒ a+b=-2.

Din a doua condiţie avem: $V\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)\Rightarrow\frac{-\Delta}{4a}=-1\Rightarrow\Delta=4$.

Dar $\Delta=a^2-4b$ şi obţinem: $\begin{cases}a+b=-2\\ a^2-4b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=0\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^2-2x$.

2) Utililizând relaţia $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ obţinem: $\frac{1}{\log_a x}=\log_x a,\ \frac{1}{\log_b x}=\log_x b,\ \frac{1}{\log_c x}=\log_x c$.

i) Presupunem a,b,c progresie geometrică, atunci $b^2=a\cdot c$ şi prin logaritmare în baza x avem:
$\log_x b^2=\log_x(a\cdot c)\Leftrightarrow\log_x b=\frac{\log_x a\cdot\log_x c}{2}$, deci este adevărată ii).

ii) Presupunem $\log_x b=\frac{\log_x a\cdot\log_x c}{2}\Rightarrow b^2=a\cdot c$.

3) a) $\Delta(1)=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

b) $\Delta(x)=x^2\cdot\begin{vmatrix}1-x^2 & x & 1\\ x & 1 & -1\\ 1+x^2 & x & -x\end{vmatrix}=x^2(-1-x)$

$\Delta(x)=0\Rightarrow -x^2(x+1)=0\Rightarrow x_{1,2}=0$ şi $x_3=-1$.

II.1) a) Punem condiţia ca expresia de sub radical să fie pozitivă şi avem: $x^2-4x+3\geq 0\Rightarrow D=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

b) $f'(x)=\frac{(x^2-4x+3)'}{2\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\Rightarrow D'=(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

x	-∞		1		2		3		+∞
f'(x)	-	-	/	/	/	/	/	+	+
f(x)	+∞		0				0		+∞

Funcţia are puncte de extrem local în 1 şi 3.

c) $f''(x)=\dfrac{(x-2)'\sqrt{x^2-4x+3}-(x-2)\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)'}{x^2-4x+3}=$

$=\dfrac{-1}{(x^2-4x+3)\sqrt{x^2-4x+3}}\Rightarrow f''(x)<0$

Funcţia este concavă pe D.

2) a) $\int f(x)dx=\int\dfrac{2(x^2-5x+4)'}{x^2-5x+4}dx=2\ln\left(x^2-5x+4\right)+C$.

b) $\int f(x)dx=2\int(\ln x)'\cdot\dfrac{(\ln^2 x-5\ln x+4)'}{\ln^2 x-5\ln x+4}dx=2\ln\left(\ln^2 x-5\ln x+4\right)+C$.

III. a) AB∩AC={A}, A: $\begin{cases}2x+3y-7=0\\4x-5y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$;

AB∩BC={B}, B: $\begin{cases}2x+3y-7=0\\x-4y+13=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$;

BC∩AC={C}, C: $\begin{cases}x-4y+13=0\\4x-5y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}$.

b) Centrul cercului se găseşte la intersecţia mediatoarelor laturilor [AB] şi [BC].

M: $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2\end{cases}$, N: $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$.

Ecuaţiile mediatoarelor: $y-y_0=m(x-x_0)$

Pantele: $m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2}{-3}$; $m_{BC}=\dfrac{1}{4}$

$m_{MM_0}=-\dfrac{1}{m_{AB}}=\dfrac{3}{2}$; $m_{NM_0}=-\dfrac{1}{m_{BC}}=-4$

Ecuaţiile mediatoarelor: MM_0: $y-2=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$; $NM_0: y-4=-4(x-3)$

Coordonatele centrului cercului se obţine rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii:

$M_0:\begin{cases}y-2=\dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\\y-4=-4(x-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{59}{22}\\y=\dfrac{58}{11}\end{cases}$.