Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

2. Profilurile industrial, agricol şi sportiv-real

Varianta nr.2

I. 1) a) $t^2-7t+6=0$ $\Delta=49-24=25$ $t_1=1$; $t_2=6$

b) $(-x^2+2x)^2-7(-x^2+2x)+6=0$

Notăm $-x^2+2x=t$ şi obţinem: $t^2-7t+6=0$ cu soluţiile $t_1=1$ şi $t_2=6$

Revenim la necunoscuta x şi avem:

$-x^2+2x=1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=1$

$-x^2+2x=6 \Rightarrow x^2-2x+6=0 \Rightarrow \Delta=-20$

$x_1=1-i\sqrt{5}$; $x_2=1+i\sqrt{5}$.

2) a) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0 \Leftrightarrow 3^{2(x^2-1)}-36\cdot 3^{(x^2-1)-2}+3=0$

Notăm $3^{x^2-1}=t$ şi obţinem: $t^2-4t+3=0$ cu soluţiile: $t_1=1$ şi $t_2=3$.

Revenim $3^{x^2-1}=1 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 1$

$3^{x^2-1}=3^1 \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$

b) Punem condiţiile $x>0$ şi $x\neq 1$ şi avem

$$\frac{1}{2}\log_x 5+\log_x 5+1-2{,}25=\frac{1}{4}\log_x^2 5\,\Big|\cdot 4$$

Notăm $\log_x 5=t$ şi avem: $t^2-5t+6=0$ cu soluţiile $t_1=1$ şi $t_2=5$.

Revenim: $\log_x 5=1 \Rightarrow x_1=5$

$\log_x 5=5 \Rightarrow x^5=5 \Rightarrow x_2=\sqrt[5]{5}$ soluţii.

3) $$d=10\cdot\begin{vmatrix}1&2&3&1\\2&3&4&1\\3&4&1&1\\4&1&2&1\end{vmatrix}=160$$

II.1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(x^2+x-5\right)\right]=\infty\cdot\infty=\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-5}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

b) $f'(x)=\left(e^{-x}\right)'\left(x^2+x-5\right)+e^{-x}\left(x^2+x-5\right)'=e^{-x}\left(-x^2+x+6\right) \Rightarrow D'=\mathbf{R}$.

b) f(x)=0⇒ $x^2+x-5=0$⇒ $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

f'(x)=0⇒ $-x^2+x+6=0$⇒ $x_1=-2$; $x_2=3$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$		-2		0		$\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$		3		$+\infty$
f'(x)	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	-	-
f(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-3e^2$	↗	-5	↗	0	↗	max	↘	0
			∩Ox		min		∩Oy		∩Ox		$7e^{-3}$		

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}\overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{(8+3x)^2}}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{\sqrt[4]{(16+5x)^3}}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{64}}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{\sqrt[4]{16^3}}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{8}{5}=\frac{8}{5}.$$

3) $$I=\int_1^4 \ln\frac{5-x}{4x}\cdot x'dx = x\ln\frac{5-x}{4x}\Big|_1^4+\int_1^4\frac{5}{5-x}dx=\left[x\ln\frac{5-x}{4x}-5\ln(5-x)\right]\Big|_1^4=$$
$$=4\ln\frac{1}{16}-5\ln 1-\ln 1+5\ln 4=-3\ln 4$$

III. a) Din ecuaţia *C*: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ avem $x_0=0$, $y_0=0$, $r=4$

$$d(O,A)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}<4$$ ⇒A∈Int*C*.

b) $m_{OA}=2$, ecuaţia dreptei OA: $y-y_0=m(x-x_0)$

d: y=2x

Ecuaţia tangentei la cerc: $xx_0+yy_0=r^2$ şi din M(a,b) obţinem: ax+by=16 care are panta $m_t=-\frac{a}{b}$ egală cu m_{OA} ⇒ a=-2b.

Din M∈*C* ⇒ $a^2+b^2=16$

Avem: $4b^2+b^2=16$ ⇒ $b=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$; $a=\mp\frac{8\sqrt{5}}{5}$.