

## Soluții

### Sesiunea iunie-iulie 1999

#### 2. Profilurile industrial, agricol și sportiv-real

Varianta nr.3

I. 1) Notăm:  $\frac{1}{x+2y} = z$  și obținem:  $\begin{cases} z+y=2 \\ zy=-3 \end{cases} \Rightarrow t^2-St+P=0$  cu  $S=2$  și  $P=-3$ .

$t^2-2t-3=0$  cu rădăcinile  $t_1=-1$  și  $t_2=3$ .

Revenim la sistem: i)  $\begin{cases} \frac{1}{x+2y} = -1 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 \end{cases}$

ii)  $\begin{cases} \frac{1}{x+2y} = 3 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -1 \end{cases}$ .

2) Condiții:  $x+2>0 \Rightarrow x>-2$

$$x+2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow x \in [-2, \infty) - \{-1\}.$$

$$1 + \frac{2}{\log_5(x+2)} = \log_5(x+2). \text{ Not: } \log_5(x+2) = t$$

$$1 + \frac{2}{t} = t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \text{ cu } t_1 = -1; t_2 = 2$$

$$\log_5(x+2) = -1 \Rightarrow x+2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x_1 = -\frac{9}{5} \text{ soluție}$$

$$\log_5(x+2) = 2 \Rightarrow x+2 = 25 \Rightarrow x_2 = 23 \text{ soluție}$$

3) a) Luăm  $M(a,b), N(c,d) \in G$  cu  $a,b,c,d \in \mathbf{R}$  și  $N(c,d) = \begin{pmatrix} c+d & 4d \\ -d & c-d \end{pmatrix}$

$$M(a,b) + N(c,d) = \begin{pmatrix} (a+c) + (b+d) & 4(b+d) \\ -(b+d) & (a+c) - (b+d) \end{pmatrix} \in G$$

b)  $G_1$  – asociativitatea – adunarea matricelor este asociativă

$$G_2$$
 – element neutru – matricea  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$

$$G_3$$
 – elemente simetrice – matricea opusă –  $M(a,b) = \begin{pmatrix} -(a+b) & -4b \\ b & -(a-b) \end{pmatrix}$

$G_4$  – comutativitatea – evidentă

II. 1. a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$

b)  $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow D' = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

x	-1	0	1
f'(x)	-	+	0
f(x)	///-	0	-///

crescătoare      descrescătoare

c)  $f''(x) = -\frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$  concavă pe D.

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} \right]^{\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}}$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^8$

3)  $f(x)=0 \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f(x)	-	-	0	+	+

b)  $Aria(\Gamma_f) = \int_{-2}^0 |f(x)| dx = -\int_{-2}^{-1} e^{-x}(x+1) dx + \int_{-1}^0 e^{-x}(x+1) dx =$

$= \int_{-2}^{-1} (x+1)(e^{-x}) dx - \int_{-1}^0 (x+1)(e^{-x}) dx = (x+1)e^{-x} \Big|_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} e^{-x} dx - (x+1)e^{-x} \Big|_{-1}^0 -$   
 $-\int_{-1}^0 e^{-x} dx = e^2 + e^{-x} \Big|_{-2}^{-1} - 1 - e^{-x} \Big|_{-1}^0 = e^2 + e - e^2 - 1 - 1 + e = 2e - 2$

III. a)  $M_0: x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = 3, y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = 2, m_{AB} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -1, m_{med} = 1$

med:  $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = x - 3$

Intersecția cu dreapta d este punctul C care se obține rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptei d și a mediatoarei.

C:  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Centrul cercului se află în punctul C(2,1),

iar raza  $r = CA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{10}$

Ecuația cercului C:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0.$