Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

2. Profilurile industrial, agricol şi sportiv-real

Varianta nr.4

I. 1) $3^{x^3-3x^2-4x+9}=3^{-3}$ ⇒$x^3-3x^2-4x+9=-3$ ⇒$x^3-3x^2-4x+12=0$ ⇒$(x-2)(x+2)(x-3)=0$

$x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$.

2) a) $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ **;** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{q-1}$

b) $S_3=a_1(1+q+q^2)$⇒ $a_1(q^2+q+1)=\frac{a_1}{q-1}$ ⇒$q^3-1=1$ ⇒ $q=\sqrt[3]{2}$.

3) a) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & b\end{pmatrix}$

$d=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$ determinantul principal. Luăm determinantul de ordinul 3:

$d_1=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & a\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=a+1$ care trebuie să fie nul ⇒ a=-1.

Determinantul caracteristic trebuie să fie nul şi obţinem:

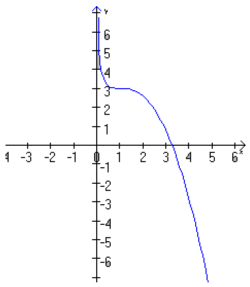
$d_c=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & b\end{vmatrix}=3b-5\Rightarrow 3b-5=0\Rightarrow b=\frac{5}{3}$

b) Necunoscutele principale sunt x şi y, iar $z=\alpha\in$ **R** şi $t=\beta\in$ **R**.

Sistemul principal: $\begin{cases}2x-y=1-\alpha+\beta\\ x+y=-1+\alpha-\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1+\alpha-\beta\end{cases}$.

II. 1) a) $f'(x)=\frac{2}{x}+2x-4$ ⇒ D'=**R**-{0}

f'(x)=0⇒ $\frac{2}{x}+2x-4=0\Rightarrow 2x^2-4x+2=0\Rightarrow (x-1)^2=0\Rightarrow x=1$



b) f(x)=0⇒ $m=-2\ln x-x^2+4x$. Notăm $g(x)=-2\ln x-x^2+4x$, $g:(0,\infty)\to$**R**.

Reprezentăm grafic funcţia g.

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=+\infty$

$$g'(x) = -2 \cdot \frac{(x-1)^2}{x} < 0$$

x	0		1		+∞
f'(x)	-	-	0	-	-
f(x)	|+∞	$\searrow$	3	$\searrow$	-∞

Ecuaţia g(x)=m are o singură soluţie pozitivă, $\forall m \in \mathbf{R}$.

2) a) Se calculează primitiva prin părţi:

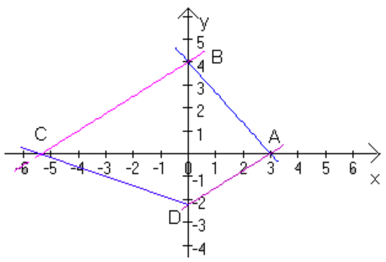
$$\int f(x)dx = \int (e^x)' \cdot (3x^2 - 2x - 5)dx = (3x^2 - 2x - 5)e^x - \int (6x-2)(e^x)'dx =$$

$$= (3x^2 - 2x - 5)e^x - (6x-2)e^x + 6\int e^x dx = e^x(3x^2 - 8x + 3) + C.$$

b) Se descompune fracţia în fracţii raţionale simple:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2 + 3x + 2}dx = \ln\frac{x+1}{x+2} + C.$$

III. a)



$d \cap Ox$ y=0⇒x=3 A(3,0)

$d \cap Oy$ x=0⇒y=4 B(0,4)

$$m_{AB} = -\frac{4}{3}$$

b) $AD \perp AB \Rightarrow m_{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ AD: $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}(x-3)$

D: x=0⇒y=$-\frac{9}{4}$ D(0,$-\frac{9}{4}$)

$BC \perp AB \Rightarrow m_{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ BC: $y - 4 = \frac{3}{4}x$

C: y=0⇒ $x = -\frac{16}{3}$ $C\left(-\frac{16}{3}, 0\right)$