Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

1. Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.1

I. 1) a) E(x) există pentru $\forall x\in \mathbf{R}^{*}_{+}$ şi $E(x)=1+3\log_2 x+3(\log_2 x)^2+(\log_2)^3$, deci

$E(x)=(1+\log_2 x)^3$.

b) Din E(x)=-8 $\Rightarrow(1+\log_2 x)^3=-8$ cu unica soluţie reală $1+\log_2 x=-2\Rightarrow\log_2 x=-3\Rightarrow\Rightarrow x=2^{-3}\Rightarrow x=\frac{1}{8}$.

2) a) $A=2\cdot3\cdot\begin{vmatrix}3&3&5&6\\4&4&7&m\\1&1&1&2\\2&2&3&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$ A nu este inversabilă pentru $\forall m\in\mathbf{R}$.

b) Pentru m=8 ecuaţia maticeală se transformă în:

$$\begin{pmatrix}6&9&5&6\\8&12&7&8\\2&3&1&2\\4&6&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\9\\3\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}6x+9y+5x+6t=7\\8x+12y+7z+8t=9\\2x+3y+z+2t=3\\4x+6y+3z+4t=5\end{cases}.$$

Deoarece $\begin{vmatrix}6&5\\8&7\end{vmatrix}=2\neq0\Rightarrow\operatorname{rang}A\geq2$ şi cum toţi minorii de ordin 3 sunt nuli

$\Rightarrow$ rang A=2.

Calculând minorii caracteristici $d_{c_1}=\begin{vmatrix}6&5&7\\8&7&9\\2&1&3\end{vmatrix}, d_{c_2}=\begin{vmatrix}6&5&7\\8&7&9\\4&3&5\end{vmatrix}$ se obţine că sunt nuli, deci sistemul e compatibil nedeterminat. Alegând $y=\alpha$ şi $t=\beta$, cu $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ se obţine sistemul echivalent:

$\begin{cases}6x+5z=7-9\alpha-6\beta\\8x+7z=9-12\alpha-8\beta\end{cases}$ cu soluţiile $x=2-\frac{3}{2}\alpha; y=\alpha, z=-1, t=\beta$, deci ecuaţia matricealâ are o infinitate de soluţii, matrici coloană de forma

$$X=\begin{pmatrix}2-\frac{3}{2}\alpha-\beta\\\alpha\\-1\\\beta\end{pmatrix}$$, cu $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

3) a) Din $z_1=z_2\Rightarrow a_1+b_1\omega=a_2+b_2\omega\Rightarrow\left(a_1-a_2-\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}\right)+\left(\frac{b_1\sqrt{3}}{2}-\frac{b_2\sqrt{3}}{2}\right)i=0\Rightarrow$

$b_1=b_2$ şi $a_1=a_2$. Din $b_1=b_2$ şi $a_1=a_2\Rightarrow a_1+b_1\omega=a_2+b_2\omega\Rightarrow z_1=z_2$.

Deci $z_1=z_2$ dacă şi numai dacă $a_1=a_2$ şi $b_1=b_2$.

b) $\omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ şi se obţinem $\omega^2+\omega+1=0$ şi $\omega^3=\omega^2\cdot\omega=1$.

c) $z_1\cdot z_2=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2-b_1b_2)\omega\in Q(\omega)$ pentru că $a_1a_2-b_1b_2\in Q$ şi $a_1b_2+b_1a_2-b_1b_2\in Q$ pentru $\forall a_1,a_2,b_1,b_2\in Q$, deci $Q(\omega)$ e parte stabilă a lui **C** faţă de "$\cdot$" nr. Complexe.

Folosind rezultatele că "$\cdot$" în **C** e asociativă şi comutativă se obţine că "$\cdot$" în $Q(\omega)$ e asociativă şi comutativă, iar elementul neutru este $e=1(=1+0\cdot\omega)$. În concluzie $(Q(\omega),\cdot)$ e monoid comutativ.

II. 1) Fie $f(x)=x\ln x-m$, $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, f derivabilă cu $f'(x)=\ln x+1$ cu rădăcina $x=-1$ şi

$f(e^{-1})=-e^{-1}-m$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}-m\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}-m=-m$$

Şirul lui Rolle se scrie:

0		e^{-1}		∞
$-m$		$-e^{-1}-m$		$+\infty$

Dacă $m<-e^{-1}\Rightarrow -m>0$ şi $-e^{-1}-m>0\Rightarrow$în şir nu e nici o schimbare de semn$\Rightarrow$ecuaţia $f(x)=0$ nu are nici o rădăcină reală

Pentru $m\geq -e^{-1}$ ecuaţia dată are soluţii reale.

2) a)
$$I_0=\int_0^1\frac{x}{e^x}dx=\int_0^1 x(-e^{-x})'dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}+\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1=$$
$$=1-\frac{2}{e}.$$

b) $f_{n+1}(x)=\dfrac{x}{e^{2^{n+1}\cdot x}}=\dfrac{x}{e^{2^n\cdot 2x}}$, iar $\dfrac{1}{2}f_n(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{e^{2^n\cdot 2x}}=\dfrac{x}{e^{2^n\cdot 2x}}$

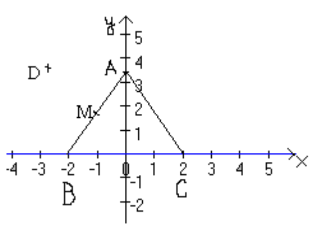
Rezultă $\forall x\in\mathbf{R}$ şi $n\in\mathbf{N}$ avem $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{2}f_n(x)$.

b)
$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}f_{n+1}(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2^{n+1}}}\frac{1}{2}f_n(2x)dx=\qquad t=2x,\ dx=\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2^n}}f(t)\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2^n}}f(x)dx=\frac{1}{4}I_n.\qquad \begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2^n}\end{cases}$$

Prin inducţie se obţine că $I_k=\dfrac{1}{4^k}I_0$ şi atunci $S_n=I_0+I_1+\ldots+I_n=I_0+\dfrac{1}{4}I_0+\dfrac{1}{4^2}I_0+\ldots+\dfrac{1}{4^n}I_0=I_0\dfrac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}}$ şi atunci

$$\lim_{n\to\infty}S_n=I_0\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{e-2}{e}\cdot\frac{4}{3}.$$

III. a)



Prin calcul $BC=4=AB=AC\Rightarrow\Delta ABC$ echilateral.

b) Fie $D(u,v)$ simetricul lui C faţă de AB şi

M mijlocul lui [AB]$\Rightarrow$ M(-1, $\sqrt{3}$) este mijlocul segmentului [DC]. Atunci

$-1=\frac{u+2}{2}$; $\sqrt{3}=\frac{v+0}{2}$, de unde $u=-4; v=2\sqrt{3}\Rightarrow$ D(-4,2 $\sqrt{3}$).

Cercul care trece prin A şi are centrul în D este *C*(D,r), unde $r=AD=\sqrt{(-4-0)^2+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2}=4$.

Deci *C*: $(x+4)^2+(y-2\sqrt{3})^2=16$.