Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

1. Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.2

I. 1) a) $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4}$ sunt termenii succesivi ai unei progresii aritmetice, atunci

$$\frac{1}{2}C_n^1 = \frac{1}{2}\left(C_n^0 + \frac{C_n^2}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{n(n+1)}{2}\right) \Leftrightarrow 8n = 8 + n^2 - n$$

$n^2-9n+8=0 \Rightarrow n=8$ (n=1 nu satisface).

b) Pentru n=8 $T_6-T_4=56$

$$C_8^5\left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-5}\cdot\left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^5 - C_8^3\left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-3}\cdot\left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^3 = 56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\cdot 2^{\frac{3x}{2}-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}-\frac{5x}{2}} - \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\cdot 2^{\frac{5x}{2}-\frac{15}{16}+\frac{15}{16}-\frac{3x}{2}} = 56 \Leftrightarrow 2^{1-x} - 2^x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2^x} - 2^x = 1 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 + 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1, \text{ sau } 2^x = -2$$

Soluţia x=0 pentru că $2^x>0$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

2) a) $z^3+z^2+z+1=0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow z_1=-1;\ z_2=-i;\ z_3=i$.

b) Cu substituţia $\frac{3z+1}{z-1} = t$ se obţine ecuaţia de la a), deci

$$\frac{3z+1}{z-i} = -1 \Rightarrow z_1 = \frac{-1-i}{2};\ \frac{3z+1}{z-i} = -i \Rightarrow z_2 = \frac{-3+i}{5};\ \frac{3z+1}{z-i} = i \Rightarrow z_3 = 0\,.$$

3) a)

$$A(x_1)\cdot A(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \\ 2x_1+2x_1^2 & 4x_1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ 2x_2+2x_2^2 & 4x_2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1+x_2 & 1 & 0 \\ 2(x_1+x_2)+2(x_1+x_2)^2 & 4(x_1+x_2) & 1 \end{pmatrix} = A(x_1+x_2)$$

b) G e o parte stabilă a lui $M_3(\mathbf{R})$ faţă de înmulţirea matricelor pentru că "$\cdot$" e lege internă în G, adică $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$ şi $A(x_1)\in G$, $A(x_2)\in G \Rightarrow A(x_1)\cdot A(x_2)\in G$. În general "$\cdot$" matricelor e asociativă$\Rightarrow$ e asociativă şi "$\cdot$" matricelor din $G\subset M_3(\mathbf{R})$. Pentru $x=0\Rightarrow A(0)=I_3$ care e element neutru faţă de "$\cdot$" în G. Cum $A(x_1+x_2)=A(x_2+x_1)\Rightarrow A(x_1)\cdot A(x_2)=A(x_2)\cdot A(x_1)$ adică "$\cdot$" în G e comutativă, iar A(-x) e elementul simetric al elementului $A(x)\in G$, deci $(G,\cdot)$ grup abelian.

II. 1) a) f e derivabilă pe **R** şi $f'(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x-\frac{x}{1+x^2}$, f '(x) derivabilă şi

$(f'(x))'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1\cdot(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\geq 0$ pentru ∀x∈**R**⇒f'(x) e crescătoare pe **R**.

b) f''(x)≥f''(0)=0 pentru ∀x∈$\mathbf{R}^*$. f'(x)≥f'(0)=0 pentru ∀x∈$\mathbf{R}^*$⇒ f e strict crescătoare pe (-∞,0)U(0,∞) şi f(0)=0. Punctul x=0 deşi e punct critic, f'(0)=0, nu e punct de extrem pentru f, în concluzie f nu are puncte de extrem local.

Din f strict crescătoare şi f(0)=0⇒ inecuaţia f(x)>0 are ca soluţie x∈(0,∞).

2) a) f e continuă şi impară, adică f(-x)=-f(x) pentru ∀x∈[-a,a] şi atunci $I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx=I_1+I_2$.

Cu substituţia x=-t se obţine: $I_1=\int_{a}^{0}f(-t)\cdot d(-t)=\int_{a}^{0}f(t)dt=-\int_{0}^{a}f(t)dt=-I_2$. Deci $I=\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

b) Funcţiile $f:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to R, f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ şi $g:\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\to R$, g(x)=$x^2$sinx sunt impare pentru că

$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$ şi

$g(-x)=x^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-g(x)$, deci $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0,\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}g(x)dx=0$.

c) $A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left|x^2\sin x\right|dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x dx=2\left(-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$

$=2\sqrt{2}\left(-\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right)$.

III. a) Fie ΔAOB şi M, respectiv N mijloacele segmentelor [AO], respectiv [BO], atunci M$\left(0,\frac{3}{2}\right)$ şi N$(-3,0)$ şi BM: $y=\frac{1}{4}(x+6)$, iar AN: $y=\frac{3}{3}(x+3)$ ecuaţiile medianelor din B, respectiv A şi cum

{G}=BM∩AN⇒G(-2,1).

b) Cum A∈Oy şi B∈Ox⇒ ΔAOB e dreptunghic în O, deci centrul cercului circumscris e la mijlocul Q al ipotenuzei [AB]⇒Q(-3, $\frac{3}{2}$) iar ortocentrul ΔAOB e O(0,0) şi cum

$d=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -3 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=-3+3=0$ deci punctele Q,O şi G sunt coliniare.