Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

1. Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.3

I. 1)
$$a_n = \frac{1-4}{1}\cdot\frac{9-4}{9}\cdot\frac{25-4}{25}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2-4}{(2n-1)^2} = \frac{-3}{1}\cdot\frac{1\cdot 5}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)^2} =$$
$$= -\frac{2n+1}{(2n-1)} = \frac{1+2n}{1-2n}$$

2) a) Fie x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile polinomului f, unde $x_1+x_2+x_3+x_4=-2$, iar $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=a$, deci
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+$$
$$+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 = (-2)^2-2a = 2(2-a).$$

b) Pentru a=3 şi $b,c\in\mathbf{R}$ şi dacă x_1,x_2,x_3,x_4 ar fi reale$\Rightarrow$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-2$ ceea ce e absurd, deci f nu poate avea toate rădăcinile reale.

c) f(1)=3 şi f are rădăcina $x_1=-1+\sqrt{2}$, deci şi rădăcina $x_2=-1-\sqrt{2}$, deci f se divide cu $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+2x-1$. Atunci 1+2+a+b+c=3 şi restul împărţirii lui f la x^2+2x-1 e polinomul nul, adică $(b-2a-2)x+a+1=0$ pentru $\forall x\in\mathbf{R}$ dă sistemul:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b-2a-2=0, \\ a+1+c=0 \end{cases} \text{cu soluţiile } \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-1 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Obţinem: $f=(x^2+2x-1)\left(x^2+\frac{1}{2}\right)$, deci ecuaţia f(x)=0 are soluţiile $x_1=-1+\sqrt{2}$, $x_2=-1-\sqrt{2}$,
$x_3=i\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $x_4=-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) a) (1) Propoziţia: $(M_2(\mathbf{Z}),\cdot)$ are o structură de grup e falsă deoarece există matrice pătratice cu determinantul nul, deci neinversabile.

(2) Propoziţia: $(G,\cdot)$ are o structură de grup e adevărată deoarece înmulţirea matricelor din G e asociativă (fiind asociativă în general), $(G,\cdot)$ are element neutru $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi cum det $A\neq 0$ pentru $\forall A\in G$, A e inversabilă şi det $A^{-1}=\pm 1$ deci $A^{-1}\in G$. $\Bigg($Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ cu $ad-bc=\pm 1\Rightarrow$
$$\Rightarrow A^{-1}=\pm 1\cdot\begin{pmatrix}a&-b\\-c&d\end{pmatrix} \text{ cu } \det A^{-1}=\pm 1(ad-bc)=\pm 1\cdot(\pm 1)=\pm 1\Bigg).$$

b) Din $A^{-1}\cdot B = B\cdot A^{-1}\Rightarrow A^{-1}\cdot B\cdot B^{-1}=B\cdot A^{-1}\cdot B^{-1}\Rightarrow A^{-1}=B\cdot A^{-1}\cdot B^{-1}\Rightarrow$
$\Rightarrow B^{-1}\cdot A^{-1}=B^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}\cdot B^{-1}\Rightarrow A^{-1}\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$, iar din
$A^{-1}\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}\Rightarrow A^{-1}\cdot B^{-1}\cdot B=B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot B\Rightarrow A^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot B\Rightarrow$
$\Rightarrow B\cdot A^{-1}=B\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot B\Rightarrow A^{-1}\cdot B=B\cdot A^{-1}$, deci $A^{-1}\cdot B=B\cdot A^{-1}\Leftrightarrow A^{-1}\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

II. 1) f are ca $D=R^*$ şi nu taie axele, f nu e nici pară nici impară.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty;\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{2}{x}}=0$$

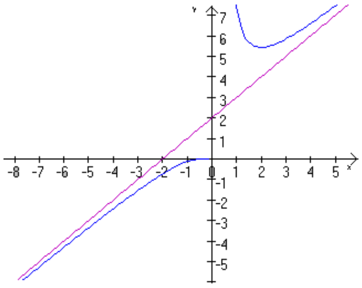
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \overset{L'H}{=} 2\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{2}{x}}=\infty\Rightarrow$$ x=0 asimptotă verticală la dreapta.

y=x+2 e asimptotă oblică la –∞ şi +∞.

f e derivabilă şi continuă pe D=R-{0} şi $f'(x)=e^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{x-2}{x}$, iar $f''(x)=\frac{4}{x^3}\cdot e^{\frac{2}{x}}$ deci x=2 e punct de minim.

x	-∞		0		2		+∞
f'(x)	+	+	|	-	0	+	+
f(x)	+∞	↗	0 | +∞	↘	2e	↗	+∞
f''(x)	-	-	|	+	+	+	+

Graficul funcţiei:



2) a) f derivabilă atunci $f'(x)=-\frac{a}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{b}{3}\cos\frac{x}{3}$

$f''(x)=-\frac{a}{9}\cos\frac{x}{3}-\frac{b}{9}\sin\frac{x}{3}\Rightarrow 9f''(x)+f(x)=0,\ \forall x\in R$.

b) Cum $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\left(3a\sin\frac{x}{3}-3b\cos\frac{x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{2}-\frac{3b\sqrt{3}}{2}+3b$, iar

$I_2=\int_0^{\pi}f(x)dx=\left(3a\sin\frac{x}{3}-3b\cos\frac{x}{3}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3a\sqrt{3}}{2}+\frac{3b}{2}$.

Sistemul $\begin{cases}I_1=0\\ I_2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3a}{2}-\frac{3b\sqrt{3}}{2}+3b=0\\ \frac{3a\sqrt{3}}{2}+\frac{3b}{2}=3\end{cases}$ cu soluţia $\begin{cases}a=-1\\ b=2+\sqrt{3}\end{cases}$

III. a) $D\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$, deci $D\left(\frac{3}{2},1\right)$ şi $m_{AB}=\frac{2-0}{0-3}=-\frac{2}{3}$

$d:y-1=-\frac{1}{-\frac{2}{3}}\left(x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow d:y=\frac{3}{2}x-\frac{15}{4}$

b) {E}=d∩OB, unde OB=Ox⇒ $E\left(\frac{5}{6},0\right)$

{F}=d∩OA, unde OA=Oy⇒ $F\left(0,-\frac{5}{4}\right)$

M mijlocul lui [AE]⇒ $M\left(\frac{23}{12},0\right)$

N mijlocul lui[BF]⇒ $N\left(0,\frac{3}{8}\right)$

$m_{MD}=\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{23}{12}}=-\frac{24}{5}$, iar $m_{ND}=\frac{\frac{3}{8}-1}{0-\frac{3}{2}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$ şi $m_{MD}\cdot m_{ND}\neq-1$⇒ MD şi ND nu sunt perpendiculare

MO=Ox, iar ON=Oy şi cum Ox⊥Oy⇒MO⊥ON.