Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

1. Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.5

I. 1) $\sqrt{\log_3 9\left(x-\frac{1}{3}\right)} \le \log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)$ cu $x\in\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

Cu substituţia: $\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)=y$ devine $0<\sqrt{2+y}\le y$, adică $2+y\le y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2-y-2\ge 0 \Leftrightarrow y\in(-\infty,-1]\cup[2,\infty)$

Cum $y\ge\sqrt{2+y}\ge 0 \Rightarrow y\ge 0$ deci $y\in[2,\infty)$ şi revenind la necunoscuta x avem:

$\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)\ge 2 \Rightarrow x-\frac{1}{3}\ge 3^2 \Rightarrow x\in\left[\frac{28}{3},\infty\right)$.

2) a)

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^3 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

fiind determinant Vandermonde

b) Fie x_1,x_2,x_3 distincte, rădăcini ale lui $f \Rightarrow f=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \Rightarrow ax^2+bx+c=a[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2-(x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$ şi

prin identificarea coeficienţilor $\Rightarrow \begin{cases} 0=a \\ a=-a(x_1+x_2+x_3) \\ b=a(x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3) \\ c=-a(x_1x_2x_3) \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0$

c) Ecuaţia devine: $(m-1)(m-2)x^2-(m-1)(m-4)x-m(m-1)=0$ şi conform cu **b)** are cel puţin 3 rădăcini distincte pentru $(m-1)(m-2)=-(m-1)(m-4)=-m(m-1)=0$ adică pentru $m=1$.

II. 1) a) Fie D domeniul maxim de definiţie al funcţiei. Din

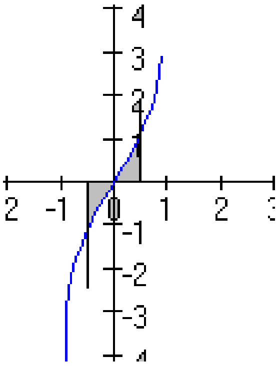
$\frac{1+x}{1-x}>0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1}<0 \Rightarrow x\in(-1,1)=D$

$f'(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow$ domeniul de derivabilitate e D.

b) Cum $\frac{2}{(1-x)^2}>0$ şi $\frac{1-x}{1+x}>0 \Rightarrow f'(x)>0$ pentru $\forall x\in(-1,1) \Rightarrow$ f e strict cresscătoare pe D.

$f''(x)=\frac{-2x\cdot 2}{(1-x^2)^2}=-\frac{4x}{(1-x^2)^2}$ şi deci x=0 e punct de inflexiune pentru f.

c) Pentru $\frac{1+x}{1-x}<1$, adică $\frac{2x}{1-x}<0, x\in(-1,0) \Rightarrow \ln\frac{1+x}{1-x}<0$ şi pentru $\frac{1+x}{1-x}>1$, adică $x\in(0,1) \Rightarrow \ln\frac{1+x}{1-x}>0$.



Aria cerută este $A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|f(x)|dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln\frac{1+x}{1-x}dx+$

$+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}x'\ln\frac{1+x}{1-x}dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}x'\ln\frac{1+x}{1-x}dx=$

$-\left[x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)\right]\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)\right]\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=$

$= -\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln 3 + \ln\frac{3}{4}$ =3ln3-4ln2.

2) a) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = (tgx - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$, iar

$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x\left(1 + tg^2 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x \cdot (tgx)' dx = 1 - n(I_n + I_{n+2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, pentru $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

b) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $tgx \in [0,1]$ şi $tg^n x \in [0,1]$, deci $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{\pi}{4}$, adică I_n e mărginit.

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n x(tx - 1) dx \leq 0$ pentru că $tg^n(tgx-1) \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow I_n$ e monoton descrescător.

În concluzie şirul e monoton şi mărginit deci convergent.

c) Din a) $\Rightarrow I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ cu $I_n \geq 0 \Rightarrow I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$ şi cum I_n e convergent rezultă

$0 \leq \lim_{n\to\infty} I_{n+2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_{n+2} = 0 = \lim_{n\to\infty} I_n$.

III. Pentru x=3 şi y<0 se obţine $\frac{9}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = -\frac{12}{5}$, adică $A\left(3, -\frac{12}{5}\right) \in E_1$

de ecuaţie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, respectiv $B\left(3, -\frac{8}{5}\right) \in E_2$ de ecuaţie $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Tangenta t_1 în A la E_1 are ecuaţia $t_1 : \frac{3x}{25} - \frac{12y}{5 \cdot 9} = 1$, adică 9x-20y=75

Tangenta t_2 în B la E_1 are ecuaţia $t_2 : \frac{3x}{25} - \frac{8y}{5 \cdot 9} = 1$, adică 27x-40y=225

$t_1 \cap t_2 = \{C\}$, unde $C\left(\frac{25}{3}, 0\right) \in Ox$.