Sesiunea iunie-iulie 1999

1.Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.1

I. (37 puncte)

1) **(7p)** Se consideră expresia $E(x)=\log_2\left(2x^2\right)+\left(\log_2 x\right)\cdot\left(1+\log_2 x\right)+\frac{1}{2}\left(\log_4 x^4\right)^2+\left(\log_2 x\right)^3$.

a) Să se stabilească domeniul de existenţă al expresiei şi să se arate că $E(x)=(1+\log_2 x)^3$.

b) Să se rezolve ecuaţia $E(x)=-8$.

2) **(15p)** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 5 & 6 \\ 8 & 12 & 7 & m \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, m parametru real.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Pentru m=8 să se rezolve ecuaţia matriceală $A\cdot X=\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

3) **(15p)** Se consideră $\omega\in\mathbf{C}$, $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ şi mulţimea $\mathbf{Q}(\omega)=\{z=a+b\omega/a,b\in\mathbf{Q}\}$.

a) Să se arate că pentru $z_1,z_2\in\mathbf{Q}(\omega)$, $z_1=a_1+b_1\omega$, $z_2=a_2+b_2\omega$, este adevărată echivalenţa: $z_1=z_2$ dacă şi numai dacă $a_1=a_2$ şi $b_1=b_2$.

b) Să se verifice că $\omega^2+\omega+1=0$ şi $\omega^3=1$.

c) Să se demonstreze că $\mathbf{Q}(\omega)$ este parte stabilă a lui **C** faţă de operaţia de înmulţire a numerelor complexe şi $\mathbf{Q}(\omega)$, împreună cu operaţia indusă, formează o structură de monoid comutativ.

II. (38 puncte)

1) **(14p)** Să se determine parametrul real m, astfel încât ecuaţia $x\ln x-m=0$ să aibă soluţii reale.

2) **(24p)** Pentru $n\in\mathbf{N}$ se definesc funcţiile $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\frac{x}{e^{2^n\cdot x}}$ şi

$$I_n=\int_0^{\frac{1}{2^n}} f_n(x)dx.$$

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se verifice relaţia $f_{n+1}(x)=\frac{1}{2}f_n(2x),\forall x,x\in R,n\in N$.

c) Să se arate că $I_{n+1}=\frac{1}{4}I_n,\forall n\in N$.

Determinaţi termenul general al şirului $s_n=I_0+I_1+\ldots+I_n$ şi calculaţi limita sa.

III. (15 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A\left(0,2\sqrt{3}\right)$, B(-2,0), C(2,0).

a) Să se reprezinte punctele şi să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

b) Să se determine coordonatele punctului D, simetricul lui C faţă de dreapta AB. Să se scrie ecuaţia cercului de centru D şi care trece prin A.