Sesiunea iunie-iulie 1999

1.Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.2

I. (40 puncte)

1) **(16p)** Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n, n \in N^*, x \in R$.

a) Determinaţi n astfel încât $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4}$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

b) Pentru n=8, verificaţi dacă există valori ale lui x astfel încât diferenţa dintre termenii al şaselea şi al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

2) **(10p)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţiile (soluţiile sub formă algebrică):

a) $z^3+z^2+z+1=0$; **b)** $\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^3+\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^2+\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)+1=0$.

3) **(14p)** Se consideră mulţimea matricelor pătratice de ordinul trei peste **R** şi submulţimea

$$G=\left\{A(x) \middle| A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x+2x^2 & 4x & 1 \end{pmatrix}, x \in R\right\}$$

a) Să se arate că $A(x_1)\cdot A(x_2)=A(x_1+x_2)$, $\forall x_1,x_2 \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că G este parte stabilă a lui $M_3(\mathbf{R})$ faţă de operaţia de inmulţire a matricelor şi G, impreună cu operaţia indusă, formează o structură de grup comutativ.

II. (35 puncte)

1) **(19p)** Se consideră funcţia f:**R**→**R**, $f(x)=x\cdot \operatorname{arctg} x-\ln(1+x^2)$.

a) Să se arate că derivata funcţiei este o funcţie crescătoare.

b) Să se stabilească monotonia şi punctele de extrem ale funcţiei f. Rezolvaţi inecuaţia f(x)>0.

2) **(16p)** **a)** Să se demonstreze că dacă funcţia f:[-a,a]→**R**, a>0, este continuă şi impară, atunci $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

b) Să se arate că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\frac{1+x}{1-x}dx=0$ şi $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x dx=0$.

c) Care este aria suprafeţei plane limitate de graficul funcţiei f:**R**→**R**, $f(x)=x^2\sin x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=-\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{4}$?

III. (15 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(0,3) şi B(-6,0).

a) Scrieţi ecuaţiile medianelor duse din A şi B, determinaţi coordonatele lui G, centrul de greutate al triunghiului AOB. Reprezentaţi punctele şi dreptele.

b) Care este poziţia centrului cercului circumscris; dar a ortocentrului triunghiului AOB ? Demonstraţi că aceste două puncte şi G sunt coliniare.