

Sesiunea iunie-iulie 1999

1. Profilurile matematică-fizică, informatică și metrologie

Varianta nr.3

I. (38 puncte)

1) (9p) Se consideră șirul $a_n = \left(1 - \frac{4}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right)$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că

$$a_n = \frac{1+2n}{1-2n}, \forall n, n \in \mathbf{N}^*.$$

2) (16p) Se consideră polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c$, a, b, c parametri.

a) Să se determine în funcție de coeficienți suma pătratelor rădăcinilor polinomului f .

b) Pentru $a=3$, să se arate că pentru orice $b, c \in \mathbf{R}$ polinomul nu poate avea toate rădăcinile reale.

c) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{Q}$, știind că restul împărțirii lui f la $(X-1)$ este egal cu 3 și f are rădăcina $-1 + \sqrt{2}$.

3) (15p) Se consideră $M_2(\mathbf{Z})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin doi peste \mathbf{Z} , submulțimea $G = \{A \in M_2(\mathbf{Z}) \mid \det A = 1 \text{ sau } \det A = -1\}$ și legea de compoziție înmulțirea matricelor. Admitem că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Z})$ față de operația de înmulțire a matricelor.

a) Precizați și justificați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

(1) $(M_2(\mathbf{Z}), \cdot)$ are o structură de grup;

(2) (G, \cdot) are o structură de grup.

b) Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{Z})$ sunt inversabile, să se arate că este adevărată echivalența:

$$A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1} \text{ dacă și numai dacă } A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

II. (36 puncte)

1) (22p) Să se reprezinte grafic funcția definită prin legea $f(x) = x \cdot e^{\frac{2}{x}}$.

2) (14p) Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = a \cos \frac{x}{3} + b \sin \frac{x}{3}$, a și b parametri reali.

a) Să se verifice că $9f''(x) + f(x) = 0$, $\forall x, x \in \mathbf{R}$.

b) Să se determine a și b astfel încât $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 0$ și $\int_0^{\pi} f(x) dx = 3$.

III. (14 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,0)$ și $B(0,2)$.

a) Să se determine coordonatele punctului D , mijlocul segmentului $[AB]$. Scrieți ecuația mediatoarei d a segmentului $[AB]$.

b) Să se determine coordonatele următoarelor puncte: $\{E\} = d \cap OB$, $\{F\} = d \cap OA$, M mijlocul segmentului $[AE]$ și N mijlocul segmentului $[BF]$. Să se verifice dacă dreptele MD și ND sunt perpendiculare. Dar MO și ON ?