Sesiunea iunie-iulie 1999

1.Profilurile matematică-fizică, informatică şi metrologie

Varianta nr.4

I. (38 puncte)

1) **(17p)** Să se rezolve următoarele ecuaţii:

a) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}+2\cdot\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}}=\frac{11}{3}$**;** **b)** $\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}+2\cdot\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}=\frac{11}{3}$.

2) **(12p)** Se consideră dezvoltarea $\left(x-\frac{2}{x}\right)^n, x\in R^*, n\in N^*$.

a) Să se determine n astfel încât suma coeficienţilor primilor trei termeni ai dezvoltării să fie 97.

b) Pentru n=8, verificaţi dacă există un termen care conţine pe x^4. Justificaţi răspunsul.

3) **(9p)** Să se rezolve sistemul (S) $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ 2x+y+z+2t=0 \\ x+2y+2z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$.

II. (38 puncte)

1) **(14p)** Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to R, f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)-\log_{\frac{1}{2}}x,\ \ g(x)=2x^3-3x^2$.

a) Să se stabilească monotonia funcţiilor f şi g.

b) Determinaţi numărul de soluţii reale ale ecuaţiei f(x)=g(x).

2) **(10p)** **a)** Să se demonstreze că suma a două funcţii convexe f,g:I→**R** (I interval deschis) este o funcţie convexă.

b) Să se arate că următoarele funcţii sunt convexe:

f:**R**→**R**, $f(x)=ax^4+bx^2+cx+d$, a,b,c,d∈**R**, a,b>0;

h:(0,∞)→**R**, $h(x)=4x^4+3x^2-5x+7+\log_{\frac{1}{2}}x$.

3) **(10p)** Se consideră şirul $I_n-\int_0^1\frac{x^n}{4x^2+2x+1}dx, n\in N$.

b) Să se arate că $I_n\geq 0$, să se stabilească monotonia şi să se precizeze dacă şirul este convergent.

b) Determinaţi a∈**R** astfel încât $\frac{1}{4x^2+2x+1}\leq a, \forall x, x\in R$. Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.

III. (14 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră elipsele de ecuaţii: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ şi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Pentru fiecare elipsă să se scrie ecuaţia tangentei în punctul de abscisă 2 şi ordonata pozitivă. Să se arate că cele două tangente se intersec-tează într-un punct situat pe axa Ox. Reprezentaţi grafic elipsele şi tangentele.