Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

4. Profilul pedagogic

Varianta nr.1

I. 1) Primul magazin $\frac{2}{3}\mathrm{I}$

Al doilea magayin 0,3 din $\frac{1}{3}\mathrm{I}$, adică $\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{I}=\frac{1}{10}\mathrm{I}$

Al treilea magazin $\mathrm{I}-\left(\frac{2}{3}\mathrm{I}+\frac{1}{10}\mathrm{I}\right)=\mathrm{I}-\frac{23}{30}\mathrm{I}=\frac{7}{30}\mathrm{I}$

Diferenţa: $\frac{2}{3}\mathrm{I}-\frac{7}{30}\mathrm{I}=143\Rightarrow\frac{13}{30}\mathrm{I}=143$, deci $\mathrm{I}=143\cdot\frac{30}{13}=11\cdot30=330$

Primul magazin a primit $\frac{2}{3}\cdot330=2\cdot110=220\,\mathrm{kg}$

Al doilea magazin $\frac{1}{10}\cdot330=33\,\mathrm{kg}$

Al treilea magazin $\frac{7}{30}\cdot330=77\,\mathrm{kg}$.

2) Scriem numerele în baza x desfăşurat: $3(x+5)=4x+6\Rightarrow3x+15=4x+6\Rightarrow x=9$.

3) Notăm cu t timpul cerut $\Rightarrow 15t+60t=300\Rightarrow75t=300\Rightarrow t=4$ ore.

II. 1) $\lg\left[2\left(4^{x-2}+9\right)\right]=\lg\left[10\left(2^{x-2}+1\right)\right],\ x\in\mathrm{R}$

$2\left(2^{2(x-2)}+9\right)=10\left(2^{x-2}+1\right)$. Notăm $2^{x-2}=y$

$2y^2+18=10y+10\Rightarrow 2y^2-10y+8=0$ cu soluţiile $y_1=1$ şi $y_2=4$

Avem: $2^{x-2}=1\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2$

$2^{x-2}=4\Rightarrow x-2=2\Rightarrow x=4$.

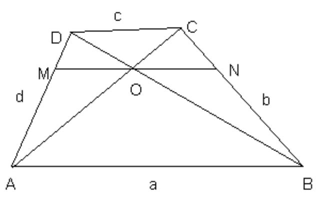
2) După efectuarea calculelor obţinem: $x^3-15x^2+79x-225=0$ cu coeficienţi reali

care admite ca rădăcini pe $z_1=3+4i\Rightarrow z_2=3-4i$. Construim polinomul care are rădăcinile z_1 şi z_2 $\Rightarrow \mathrm{I}=x^2-6x+25=0$. Împărţim cele 2 polinoame $\Rightarrow$

$x^3-15x^2+79x-225=(x^2-6x+25)(x-9)\Rightarrow z_3=9$.

3) Vezi profilul industrial, varianta nr.1, subiect I. 3)

III. 1) a)



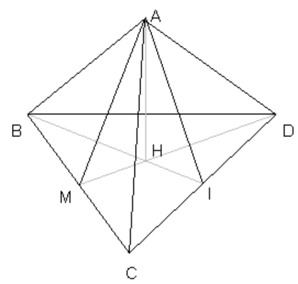
$$\left.\begin{array}{l}\Delta AOM \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{MO}{c}=\frac{AM}{d} \Rightarrow MO=\frac{c\cdot AM}{d}\\ \Delta DMO \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{MO}{a}=\frac{d-AM}{d} \Rightarrow MO=\frac{a(d-AM)}{d}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$c·AM=a(d-AM)$\Leftrightarrow$c·AM+a·AM=ad$\Rightarrow$AM=$\frac{ad}{a+c}$.

Similar din asem[narea ΔONB~ΔDBC şi ΔONC~ΔABC $\Rightarrow$ BN=$\frac{ab}{a+c}$.

b) $AM+BN=\frac{ad}{a+c}+\frac{ab}{a+c}=\frac{a(d+b)}{a+c}\overset{ip}{=}\frac{a(a+c)}{a+c}=a=AB$.

2)



ΔACD şi ΔBCD sunt echilaterale şi I mijlocul lui [CD] $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}AI\perp CD\\ BI\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp(AIB)\Rightarrow CD\perp AH$, dar AH $\perp$ BI deci AH este perpendiculară pe 2 drepte concurente din planul BCD$\Rightarrow$ AH$\perp$(BCD). Ducem mediana DM şi printr-un raţionament similar $\Rightarrow$ AH'$\perp$(BCD), unde H' este piciorul înălţimii din A a ΔAMD. Dar perpendiculara dintr-un punct pe un plan este unică $\Rightarrow$ H=H', deci H=BI$\cap$MD.

Pentru volum avem: $BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HI=\frac{1}{3}BI=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$

$$AH=a\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow V=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$