Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

4. Profilul pedagogic

Varianta nr.3

I. 1) 10 robinete………………4 ore……………24000 litri

1 robinet ………………1 oră…………… $\frac{24000}{40} = 60$ litri

Atunci: 12 robinete…………1 oră…………600·12 litri=7200 litri

12 robinete…………x ore…………21600 litri

$x = \frac{21600}{7200} = 3$ ore.

2) $\left.\begin{matrix} n-7=7k_1 \\ n-8=8k_2 \\ n-9=9k_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} n=7(1+k_1) \\ n=8(1+k_2) \Rightarrow n=[7,8,9]=504\,(\text{c.m.m.m.c}) \\ n=9(1+k_3) \end{cases}$.

3) $\begin{cases} F=2B \\ F=3(B-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F=18 \\ B=9 \end{cases}$, unde F nr.fete şi B nr.băieţilor.

II. 1) Avem: $\begin{matrix} b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} \\ S_n = b_1 \frac{2^n - 1}{2-1} \end{matrix}$. Deci $\begin{cases} b_1 \cdot 2^{n-1} = 96 \\ b_1(2^n - 1) = 189 \end{cases}$. Prin împărţire ⇒

$\frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = \frac{189}{96} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{189}{96} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{192-189}{96} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{96} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{\nu-1} = 32 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^5 \Rightarrow n=6$.

2) a) $C_n^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2-n-72=0 \Rightarrow n_1=9$ şi $n_2=-8$ nu este soluţie

pentru că nu este număr natural.

b) $T_{k+1} = C_n^k \left(x\sqrt[4]{x}\right)^{9-k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_n^k x^{\frac{5(9-k)}{4} - \frac{k}{2}}$. Avem: $\frac{5(9-k)}{4} - \frac{k}{2} = 3 \Leftrightarrow$ 45-5k-2k=12 ⇒ 7k=33 ⇒ $k = \frac{33}{7} \notin N$, deci

nu există termeni care să conţină pe x^3.

3) a) Fie x,y∈G, deci x>2, x≠3 şi y>2, y≠3 trebuie să arătăm că x*y∈G, adică

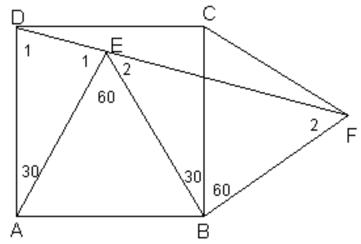
îndeplineşte condiţia de mai sus. Avem x>2 ⇒ x-2>0 deci $(x-2)^{\frac{1}{3}\ln(y-2)} + 2 > 2 \Rightarrow x*y > 2$.

Presupunem că x*y=3 ⇒ $(x-2)^{\frac{1}{3}\ln(y-2)} + 2 = 3 \Rightarrow (x-2)^{\frac{1}{3}\ln(y-2)} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln(y-2)\cdot\ln(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}\ln(y-2)=0 \Rightarrow y-2=1 \Rightarrow y=3\\ \ln(x-2)=0 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3\end{cases}$ contradicţie cu ipoteza.

b) Se verifică axiomele grupului; se obţine elementul neutru $E=e^3+2$

III. 1)



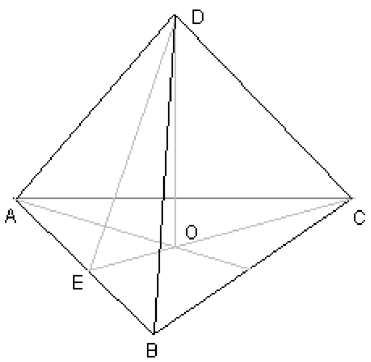
În ΔAED isoscel avem: $2E_1=150^0$

În ΔBEF isoscel avem: $2E_2=90^0$

Atunci $2(E_1+E_2)=240^0 \Rightarrow E_1+E_2=120^0$

Deci $E_1+E_2+60^0=180^0 \Rightarrow$ punctele sunt coliniare.

2)



a) $\left.\begin{matrix} DE \perp AB \\ CE \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (CDE)$

b) $AB\perp(CDE)$ şi planul (ABD) conţine pe $AB \Rightarrow (ABD)\perp(CDE)$ iar

DE este dreaptă comună şi $MC\perp DE$

$\Rightarrow MC\perp(ABD)$.

În ΔDEC avem: $DE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $EC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ triunghiul este echilateral şi deci MC este înălţime $\Rightarrow MC=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{4}$.

Considerăm piramida cu baza ABD atunci CM este înălţime în această piramidă (pentru că $MC\perp(ABD)$)

Avem: $V=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3a}{4}}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.