Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

4. Profilul pedagogic

Varianta nr.4

I. 1) 12 muncit ……………..14 zile ………………. $\frac{4}{7}$ L

1 muncit …………………1 zi ………………… $\frac{4}{7\cdot 12\cdot 14}\mathrm{L}=\frac{1}{21\cdot 14}\mathrm{L}$

Deci 1muncit……………..21 zile ……………… $\frac{21}{21\cdot 14}\mathrm{L}=\frac{1}{14}\mathrm{L}$

x muncit ………………21 zile…………………..1·L

$x=\frac{1}{\frac{1}{14}}=14$ deci mai trebuie angajaţi 2 muncitori.

2) Fie x, y cele două numere ⇒ $\begin{cases}x=4y+2\\ x-y=35\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=46\\ y=11\end{cases}$.

3) Fie r-nr.riglelor, a-ascuţitori, cr-creioane, g-gume, ca-caiete

Avem: r=60⇒a=15⇒ca=7·15=105⇒g=105-100=5⇒cr=4·5=20.

II. 1) a) $f_m(1)=m^2-1-2(m^2+2)+4m^2-4=-9$

b) Avem $(m^2-1)-2(m^2+2)x+m^2-5<0$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

Se pun condiţiile: $\begin{cases}\Delta\le 0\\ a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(m^2+2)^2-(m^2-5)(m^2-1)\le 0\\ m^2-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10m^2-1\le 0\\ m^2-1<0\end{cases}$ care se rezolvă.

2) Se demonstrează prin inducţie:

Pentru n=1⇒ 2=2 adevărată P(1)

Presupunem P(k) adev.: $(k+1)(k+2)\dots(k+k)=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$

P(k+1): $(k+2)(k+3)\dots(k+1+k+1)=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)$ adev. ?

<u>Dem</u>:

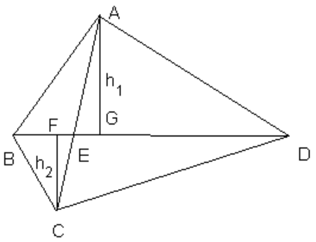
Avem: $(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k+2)=\frac{(k+1)(k+2)\dots 2k(2k+1)(2k+1)(2k+3)}{k+1}\overset{\text{ip.deinducţei}}{=}$

$=\frac{2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)\cdot 2(k+1)}{k+1}=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1).$

3) a) Se observă că toate trei coloanele sunt proporţionale, deci toţi minorii de ordinul 3 şi 2 sunt nuli. Rangul matricei A este 1.

b) Matricea sistemului este chiar matricea A de la punctul **a)**, deci rang A=1, iar matricea extinsă $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 3 \\ 3 & 15 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ are rangul 2, deci rang A≠rang $\overline{A}$ ⇒ sistemul este incompatibil (teorema lui Kronecker-Cappelli).

III. 1) a)



Se ştie că într-un patrulater inscriptibil unghiul format de o diagonală şi latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

Deci: ∢EAD≡∢CBE şi ∢ADE≡∢BCE ⇒asemănarea triunghiurilor

Ducem CF⊥BD şi AG⊥BD şi notăm FC=h_1 şi AG=h_2

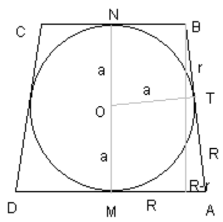
b)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Din } \Delta BEC \sim \Delta AED \Rightarrow \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{ED}{EC} \\ \text{Din } \Delta AEG \sim \Delta DEC \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AE}{ED} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD} = \frac{ED}{EC} \cdot \frac{AE}{ED} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

$$\text{Din } \Delta AEG \sim \Delta CEF \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{AE}{EC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \dfrac{BD \cdot h_1}{BD \cdot h_2} = \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{AE}{EC} \\ \text{dar } \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD} \ (\text{rel.}(1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD}.$$

2)



Notăm r – raza mică a trunchiului, R – raza mare a truchiului, a – raza sferei

Tangentele dintr-un punct exterior sunt egale, deci NB=BT=r şi MA=AT=R

ΔAEB dreptunghic ⇒ $BE^2 = AB^2 - AE^2$

⇒ $4a^2=(R+r)^2-(R-r)^2 \Leftrightarrow 4a^2=4Rr \Leftrightarrow a^2=Rr$

$\Rightarrow a = \sqrt{Rr}$.

$$\frac{As}{Atr} = \frac{4\pi a^2}{\pi G(R+r) + \pi(R^2 + r^2)} = \frac{4\pi Rr}{\pi\left[(R+r)^2 + R^2 + r^2\right]} = \frac{2Rr}{R^2 + r^2 + Rr} \quad (1)$$

$$\frac{Vs}{Vtr} = \frac{4\pi \dfrac{\left(\sqrt{Rr}\right)^3}{3}}{\dfrac{2\pi\sqrt{Rr}}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)} = \frac{4\pi Rr\sqrt{Rr}}{2\pi\sqrt{Rr}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)} = \frac{2Rr}{R^2 + r^2 + Rr} \quad (2)$$

Din (1) şi (2) ⇒ concluzia cerută.