Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

4. Profilul pedagogic

Varianta nr.5

I. 1) $$\left.\begin{matrix} 2r\ldots\ldots 8\text{ ore}\ldots\ldots 1B & \text{deci } r_2\ldots\ldots 18\text{ ore}\ldots\ldots \frac{3}{4}B \\ 2r\ldots\ldots 2\text{ ore}\ldots\ldots \frac{1}{4}B & r_2\ldots\ldots x\text{ ore}\ldots\ldots \frac{3}{4}B \end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\frac{18}{\frac{3}{4}}=24\text{ ore}$$

Deci $$\left.\begin{matrix} r_2\ldots\ldots 1\text{ oră}\ldots\ldots \frac{1}{24}B \\ r_2\ldots\ldots 8\text{ ore}\ldots\ldots \frac{8}{24}B \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} r_1\ldots\ldots 8\text{ ore}\ldots\ldots \frac{2}{3}B \\ r_1\ldots\ldots y\text{ ore}\ldots\ldots 1B \end{matrix}\right\}\Rightarrow y=\frac{8}{\frac{2}{3}}=12\text{ ore}.$$

2) Numerele sunt de forma $\overline{9a0}$ cu 9+a=16 deci a=7 ⇒ 970

sau $\overline{9b5}$ cu 14+b=16 deci b=2 ⇒ 925.

3) Avem a=$\frac{b}{3}$, iar c=b+2

Dacă b=3 ⇒ a=1 şi c=5 deci nr. este 135

Dacă b=6 ⇒ a=2 şi c=8 deci nr. este 268

Situaţia când b=0 sau b=9 nu convine.

II. 1) a) $\Delta_1=b^2-4ac$

$\Delta_2=-a^2(b^2-4ac)=-a^2\Delta_1$

Deci: dacă (1) are rădăcini reale distincte ⇒ $\Delta_1>0$ dar atunci $\Delta_2<0$ ⇒(2) are rădăcini complexe

dacă (2) are rădăcini complexe ⇒ $\Delta_2<0$ dar atunci $\Delta_1>0$ ⇒ $x_1\neq x_2\in\mathbf{R}$.

b) Se aplică formula de rezolvare a ecuaţiei de gradul II.

2) Vezi profilul industrial, varianta nr.2, I. 2) b)

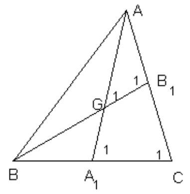
3) a) Fie $x,y\in G$ ⇒ $x,y\in\mathbf{Q}$ şi $x\neq-2$, $y\neq-2$. Trebuie arătat că $x*y\in G$ şi $x*y\neq-2$.

$\forall x,y\in G$ evident că $x*y\in\mathbf{Q}$, mai rămâne să arătăm că $x*y\neq-2$.

Presupunem că x*y=-2 ⇒ $x+y+\frac{xy}{2}=-2$ ⇔ 2x+2y+xy+4=0 ⇔ x(2+y)+2(y+2)=0 ⇔ (y+2)(x+2)=0 ⇒ x+2=0 sau y+2=0 ⇒ x=-2 sau y=-2, contradicţie cu ipoteza.

b) Se verifică axiomele grupului abelian. Se obţine e=0 şi $x' = \dfrac{-x}{1+\dfrac{x}{2}}$ care este din G pentru $\forall x \in \mathbf{Q}$, $x \neq -2$.

III. 1) a)



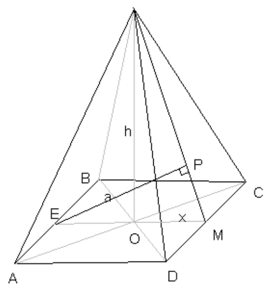
Se ştie că într-un patrulater inscriptibil un unghi exterior este congruent cu unghiul interior opus.

Deci $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ şi $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle G_1 \Rightarrow \Delta$ sunt asemenea.

b) Din asemănare $\Rightarrow \dfrac{AA_1}{AB_1} = \dfrac{AC}{AG}$ de unde ţinând cont de proprietatea medianelor, avem:

$$\frac{AA_1}{\frac{AC}{2}} = \frac{AC}{\frac{2}{3}AA_1} \Leftrightarrow \frac{2}{3}AA_1^2 = \frac{1}{2}AC^2 \Leftrightarrow 4AA_1^2 = 3AC^2.$$

2) a)



Avem AB||(SCD) pentru că AB||CD, iar (CD)$\subset$(SCD). Distanţa de la o dreaptă paralelă cu planul la un plan este lungimea proiecţiei unui punct al dreptei pe plan. Dar planul (SEM)$\perp$(SCD) pentru că BC$\perp$EM şi BC$\perp$SM (T.3P). Deci proiecţia lui E pe (SCD) este punctul P. Deci EP=a.

b) Notăm OM=x $\Rightarrow$ $SM = \sqrt{h^2 + x^2}$ şi $A_{SEM} = \dfrac{a\sqrt{h^2 + x^2}}{2}$

Dar $A_{SEM} = \dfrac{2xh}{2} \Rightarrow a\sqrt{h^2 + x^2} = 2xh \Leftrightarrow a^2(h^2 + x^2) = 4x^2h^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2h^2 = 4x^2h^2 \Rightarrow x^2(4h^2 - a^2) = a^2h^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{a^2h^2}{4h^2 - a^2} \Rightarrow x = \dfrac{ah}{\sqrt{4h^2 - a^2}}$. (Radicalul se poate calcula deoarece $2h > a \Leftrightarrow 4h^2 > a^2$).

Prin urmare latura bazei este $l = \dfrac{2ah}{\sqrt{4h^2 - a^2}}$ şi $V = \dfrac{4a^2h^3}{3(4h^2 - a^2)}$.