

# Sesiunea iunie-iulie 1999

## 4.Profilul pedagogic

Varianta nr.5

### I. (30 puncte)

- 1) (10p) Două robinete, curgând împreună, pot umple un bazin în 8 ore. Cele 2 robinete au fost deschise timp de două ore, apoi s-a închis primul robinet și bazinul s-a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet. În cât timp poate să umple bazinul fiecare robinet ?
- 2) (10p) Să se găsească numerele naturale cuprinse strict între 900 și 1000, astfel încât să se împartă fără rest la 5 și suma cifrelor să fie 16.
- 3) (10p) Să se afle numerele naturale de forma  $\overline{abc}$  astfel încât cifra sutelor să fie de 3 ori mai mică decât cifra zecilor, iar cifra zecilor să fie cu 2 mai mică decât cifra unităților.

### III. (35 puncte)

- 1) (11p) a) Se consideră ecuațiile: (1)  $ax^2+bx+c=0$   
(2)  $2a^2x^2+2abx+b^2-2ac=0$ ,  $a,b,c \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Să se arate că este adevărată următoarea echivalență:

ecuația (1) are rădăcini reale și distincte dacă și numai dacă ecuația (2) are rădăcini complexe.

- b) Să se rezolve în  $\mathbf{C}$  ecuațiile:  $t^2-5t+4=0$  și  $2z^2-10z+17=0$ .
- 2) (10p) Să se rezolve ecuația  $\log_x \sqrt{5} + \log_x (5x) - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2$ .
- 3) (14p) Se consideră mulțimea  $G = \mathbf{Q} - \{-2\}$  pe care definim operația  $x * y = x + y + \frac{xy}{2}$ .
  - a) Să se arate că operația "\*" este lege de compoziție pe G.
  - b) Să se determine structura lui G, înzestrat cu legea "\*".

### III. (25 puncte)

- 1) (12p) Se consideră triunghiul ABC,  $A_1$  și  $B_1$  mijloacele segmentelor [BC], respectiv [AC], iar G centrul de greutate al triunghiului.  
Dacă  $CA_1GB_1$  este patrulater inscriptibil, să se demonstreze că:
  - a) triunghiurile  $AGB_1$  și  $ACA_1$  sunt asemenea;
  - b)  $3 \cdot AC^2 = 4 \cdot AA_1^2$ .
- 2) (13p) Se consideră piramida regulată SABCD cu baza [ABCD]; distanța de la vârful piramidei la bază este egală cu h, iar distanța de la vârful A la planul (SCD) este a,  $\left(h > \frac{a}{2}\right)$ .
  - a) Dacă E este mijlocul segmentului [AB] și P este piciorul perpendicularei duse din E pe planul (SCD), să se arate că  $EP=a$ .
  - b) Să se calculeze volumul piramidei în funcție de a și h.